Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 3

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

zu; es ist dann $s_{n+m}(f)=n-km\geq 0$. Dass f einem verbotenen Weg entspricht, äussert sich jetzt darin, dass für mindestens ein v $s_v(f)$ negativ wird. Sei v die kleinste Nummer, für die $s_v(f)<0$ ausfällt. Dann sind $x_v=-k$, $s_v(f)=-i$ $(i\in\{1,2,\ldots,k\})$ und $s_{v-1}(f)=-i+k$; $V_i\subset V$ seien die Mengen der verbotenen Wege mit dieser Eigenschaft; es gelten dann $V_i\cap V_j=\emptyset$ für $i\neq j$ und

$$V=\bigcup_{i=1}^{k} V_i.$$

Für ein festes i konstruieren wir jetzt eine Abbildung φ: $V_i\to M$ durch $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{v-1}, -k, x_{v+1}, \ldots, x_{n+m})=(x_{v-1}, \ldots, x_1, 1, x_{v+1}, \ldots, x_{n+m})$, abgekürzt $\varphi(f)=f'$; d.h. wir ersetzen die Vertikale x_v durch eine Horizontale, kehren die Reihenfolge der vorhergehenden Glieder um und lassen die Reihenfolge der nachfolgenden Glieder bestehen.
Es gelten $s_v(f')=k-i+1$, $s_{v-1}(f')=k-i$ und $s_{n+m}(f')=n-km+k+1\geq k+1$. Wäre $s_\mu(f')=k-i+1$, $s_{\mu-1}(f')=k-i$ für ein $\mu<v$, so würde $x_{v-\mu-1}+\cdots+x_1=-1<0$, im Widerspruch zur Minimalitätsbedingung für v. Somit lässt sich f aus f' eindeutig rekonstruieren, φ ist also injektiv. Da zudem für jede beliebige Folge $f''\in M$ $s_{n+m}(f'')\geq k+1$ gilt und weil Zunahmen von s_v immer nur um 1 erfolgen, gibt es eine kleinste Nummer μ mit $s_\mu(f'')=k-i+1$, $s_{\mu-1}(f'')=k-i$. Wie oben ergibt sich daraus die Existenz einer Folge $f\in V_i$ mit $\varphi(f)=f''$; φ ist somit surjektiv. φ ist also eine Bijektion und es gilt $|V_i|=|M|$. Da sich die Überlegungen für jedes i wiederholen lassen, folgt $|V|=k|M|$ und daraus

$$z^*(n,m)=\binom{n+m}{n}-k\binom{n+m}{n+1}.$$

J. C. Binz, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Band 1, S. 139–146, Stuttgart 1973.
2 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Band 2, S. 72–77, Stuttgart 1976.
3 D. André: Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. C.R. Acad. Sci. Paris *105*, 436–437 (1887).

Aufgaben

Aufgabe 765. Es sei für reelle $x\geqq 2$

$$f^1(x)=f(x)=[\sqrt{x}]\,, f^k(x)=f^{k-1}(f(x))\,, k=2,3,\ldots$$

Man bestimme

$$n(x)=\min\{k\in\mathbf{N}\,|\,f^k(x)=1\}.$$

R. Wyss, Flumenthal SO

Lösung mit Verallgemeinerung. Es seien $a, r \in \mathbf{N}$, und $r \geq 2$. Es sei ferner für reelle $x \geq a$:

$$f^1(x) = f(x) = [x^{1/r}], f^k(x) = f^{k-1}(f(x)), k = 2, 3, \ldots,$$

sowie

$$n(x) = \min\{k \in \mathbf{N} \mid f^k(x) < a\}.$$

Dann gilt

$$n(x) = [\log_r \log_a x] + 1.$$

Die Behauptung ergibt sich durch zweimaliges Logarithmieren aus

$$a^{r^k} \leq x < a^{r^{k+1}} \Rightarrow n(x) = k + 1 : k \in \mathbf{N}_0. \qquad (*)$$

Wir beweisen (*) durch vollständige Induktion bezüglich k.
a) $k = 0$: Aus $a \leq x < a^r$ folgt unmittelbar $n(x) = 1$.
b) (*) sei für $k = 0, \ldots, m-1$ $(m \geq 1)$ bewiesen, und es sei

$$a^{r^m} \leq x < a^{r^{m+1}}.$$

Dann ist

$$a^{r^{m-1}} = [a^{r^{m-1}}] \leq [x^{1/r}] = f(x) \leq x^{1/r} < a^{r^m}.$$

Somit gilt nach Induktionsannahme: $n(f(x)) = m$, also $n(x) = m + 1$, Q.E.D.

D. Stoffer, Zürich

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), H. Augustin (Saarbrücken, BRD), A. Bager (Hjørring, Dänemark), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Hämmerling (Aachen, BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), R. Kamber (Laupersdorf SO), L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Chr. A. Meyer (Bern), R. A. Razen (Leoben, Österreich), Hj. Stocker (Wädenswil ZH), R. Tichy (Wien, Österreich), M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 766. Es sei P ein konvexes Polyeder des d-dimensionalen Raumes E^d und F eine $(d-1)$-dimensionale Seitenfläche von P mit der Flächennormalen $\boldsymbol{u}$. F heisse dominant, wenn $\pi_u(P) = \pi_u(F)$. Dabei bedeute π_u die Projektion in Richtung $\boldsymbol{u}$. $D_d(P)$ bezeichne die Anzahl der dominanten Seitenflächen von P. Welche Werte kann $D_d(P)$ annehmen?

Ch. Meier, Bern

Lösung des Aufgabenstellers. Der Wertebereich von D_d ist genau $\{0, 1, \ldots, 2d\}$. Wir zeigen dies in 2 Schritten.

1. Für $d \geq 2$ existieren Polytope $P \subset E^d$ mit $D_d(P) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, 2d$.
Beweis: durch Induktion bezüglich d: $d = 2$: Die Werte $D_d(P) = 0, 1, 2, 3, 4$ werden realisiert durch: 5-Eck mit lauter stumpfen Innenwinkeln, stumpfwinkliges Dreieck, Viereck mit 1 stumpfen und 3 spitzen Innenwinkeln, spitzwinkliges Dreieck, Rechteck. Die Behauptung sei bewiesen für alle Dimensionen $\leq d-1$ $(d > 2)$. Sei $P' \subset E^{d-1}$ ein $(d-1)$-dimensionales Polytop mit $D_{d-1}(P') = k$. Dann besitzt der gerade Zylinder $P' x I \subset E^d$ (I eine zu P' orthogonale Strecke) $k+2$ dominante Seitenflächen. Polytope P mit $D_d(P) = 1$ (bzw. 0) sind z. B. Pyramiden (bzw. Doppelpyramiden), deren Spitzen auf einer zur $(d-1)$-dimensionalen Grundfläche G senkrechten Geraden g und hinreichend nahe an G liegen. g soll dabei G in einem inneren Punkt durchstossen.
2. Es gibt kein Polytop $P \subset E^d$ mit $D_d(P) \geq 2d+1$.
Beweis: Da eine Fläche genau dann dominant ist, wenn ihre äussere Normale mit den äusseren Normalen aller anderen Flächen einen rechten oder stumpfen Winkel einschliesst, ist die Behauptung mit folgender Aussage äquivalent: Ist $A \subset S^{d-1}$ eine Teilmenge der Sphäre mit der Eigenschaft, dass je 2 beliebige Punkte $a, b \in A$ sphärischen Abstand $\Delta(a, b) \geq \pi/2$ haben, dann gilt card $A \leq 2d$. Dies folgt unmittelbar aus dem allgemeineren

Lemma. *Sind $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_i$ nichtverschwindende Vektoren des E^d mit $\langle \boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{u}_\nu \rangle \leq 0$ $(\mu \neq \nu$, $\mu, \nu = 1, \ldots, i)$, so ist $i \leq 2d$.*

Beweis des Lemmas: durch Induktion bezüglich d: Für $d = 1$ ist die Behauptung trivial, sie sei für die Dimension $d-1$ bewiesen. Wir setzen $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{w}$. Es gibt sodann unter den $\boldsymbol{u}_\nu$ $i-2$ von $\boldsymbol{w}$ linear unabhängige Vektoren, etwa o.B.d.A. $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{i-2}$. Setzen wir nun

$$\boldsymbol{v}_\nu = \boldsymbol{u}_\nu - \frac{\langle \boldsymbol{u}_\nu, \boldsymbol{w} \rangle}{\boldsymbol{w}^2} \boldsymbol{w}, \; \nu = 1, \ldots, i-2,$$

so ist $\boldsymbol{v}_\nu \neq 0$ sowie $\langle \boldsymbol{v}_\nu, \boldsymbol{w} \rangle = 0$. Die $\boldsymbol{v}_\nu$ liegen in dem zu $\boldsymbol{w}$ orthogonalen Teilraum der Dimension $d-1$ des E^d, und es gilt

$$\langle \boldsymbol{v}_\mu, \boldsymbol{v}_\nu \rangle = \langle \boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{u}_\nu \rangle - \frac{\langle \boldsymbol{u}_\mu, \boldsymbol{w} \rangle \langle \boldsymbol{u}_\nu, \boldsymbol{w} \rangle}{\boldsymbol{w}^2} \leq 0, \mu \neq \nu, \mu, \nu = 1, \ldots, i-2.$$

Nach Induktionsannahme folgt $i-2 \leq 2(d-1)$, d. h. $i \leq 2d$, Q.E.D.

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern) (Teillösung), D. Stoffer (Zürich) (Teillösung) und H. Wellstein (Würzburg, BRD).

Aufgabe 767. Eine unendliche Folge $\{n_k\}$ natürlicher Zahlen heisse Irrationalitätsfolge (IF), wenn jede konvergente Reihe der Form

$$\sum_{i=1}^{\infty} (t_i n_i)^{-1} \quad (t_i \text{ ganz positiv}) \tag{1}$$

eine irrationale Zahl darstellt. Z. B. ist $\{2^{2^k}\}$ eine IF. Es ist zu zeigen: 1. Ist $\{n_k\}$ eine IF, so ist jede Reihe (1) konvergent. 2. Es gilt $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, n_k^{1/k}=\infty$.

P. Erdös, Budapest

Lösung des Aufgabenstellers. 1. Es sei a eine beliebige positive Zahl, die insbesondere rational sein kann. Wir zeigen, dass aus $\Sigma_{i=1}^{\infty} 1/n_i=\infty$ folgt, dass a in der Form (1) dargestellt werden kann. Das ist für eine IF unmöglich, also muss $\Sigma\ 1/n_i$ und damit jede Reihe (1) konvergieren.
Die Zahlen $t_1, \ldots, t_{k-1}$ seien so bestimmt, dass

$$U_{k-1}:=a-\sum_{i=1}^{k-1}(t_i n_i)^{-1}>0. \tag{2}$$

t_k bestimmt sich als kleinste natürliche Zahl, für die $U_k>0$. Setzen wir $T_k:=\max(t_1, \ldots, t_k)$ und $S_k:=\Sigma_{i=1}^{k}\ 1/n_i$, so folgt $a>S_k/T_k$. $(S_k)\to\infty$ bedingt $(T_k)\to\infty$ und damit $(U_k)\to 0$.
2. Aus der Annahme $\overline{\lim}\, n_k^{1/k}<\infty$ folgt die Existenz einer Konstanten $C>1$, so dass $n_k<C^k$ für alle k gilt. In diesem Falle lässt sich zwar nicht mehr jedes $a>0$ in der Form (1) darstellen, wohl aber alle $a<\varepsilon$, wo $\varepsilon>0$ gegenügend klein ist und am Schluss abgeschätzt wird.
Wir nehmen an, dass die Zahlen $t_1, \ldots, t_{k-1}$ so bestimmt sind, dass für die durch (2) definierte Grösse U_{k-1} gilt:

$$0<U_{k-1}=\frac{\eta_{k-1}}{C^{k-1}}<\frac{\eta}{C^{k-1}},$$

wo η eine noch zu bestimmende Konstante ist. Es sei wieder t_k die kleinste Zahl mit $U_k>0$, d.h. $t_k n_k>C^{k-1}/\eta_{k-1}$, $(t_k-1)n_k<C^{k-1}/\eta_{k-1}$. Hieraus folgt

$$U_k=\frac{\eta_{k-1}}{C^{k-1}}-\frac{1}{t_k n_k}<\frac{1}{n_k t_k(t_k-1)}<\frac{1}{t_k-1}\cdot\frac{\eta_{k-1}}{C^{k-1}}. \tag{3}$$

Ist $\eta_{k-1}<1/C(C+1)$, so folgt wegen $n_k<C^k$ sofort $t_k>C+1$, d.h. mit (3) $U_k=\eta_k/C^k<\eta_{k-1}/C^k$ oder $\eta_k<\eta_{k-1}$. Unsere Induktion funktioniert somit mit $\eta=1/C(C+1)$. Wegen $a<\eta_0<\eta$ ist $\varepsilon<\eta$.
Anmerkung der Redaktion: O. P. Lossers bemerkt: Es gibt Folgen (n_k) mit $\overline{\lim}\, n_k^{1/k}=\infty$, die keine IF sind, z. B. $(n_k)=(k!)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)n_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{1}{2}.$$

Eine weitere Lösung sandte O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande).

Aufgabe 768. Es sei n eine zusammengesetzte natürliche Zahl. Man zeige, dass die Kongruenz

$$x^{n-1}\equiv 1 \pmod{n} \tag{1}$$

dann und nur dann nur die triviale Lösung $x \equiv 1 \pmod{n}$ besitzt, wenn $(n-1, \varphi(n)) = 1$ (φ ist die Eulersche Funktion). Damit wird eine Frage von K. Szymiczek über Pseudoprimzahlen (bezüglich x) beantwortet.

Peter Kiss, Eger, Ungarn

Lösung. Es sei $d := (n-1, \varphi(n))$. Wir betrachten zuerst den Fall $d = 1$. Ist x eine Lösung von (1), so haben wir $x \equiv 1 \pmod{n}$ zu zeigen. Nach Voraussetzung gibt es ganze a, b mit $a(n-1) + b\,\varphi(n) = 1$. Da n zusammengesetzt ist, gilt $n \geq 4$, also $ab < 0$. Sei etwa $a > 0 > b$. Wegen (1) haben wir

$$1 \equiv (x^{n-1})^a = x\,(x^{\varphi(n)})^{|b|} \equiv x \pmod{n},$$

letzteres (wegen $(x, n) = 1$) nach dem Euler-Fermatschen Satz. Analog schliesst man, wenn $a < 0 < b$.

Nun sei $d > 1$. Ist n ungerade, so genügt $x := n-1$ der Kongruenz (1), ohne dass $x \equiv 1 \pmod{n}$ ist. Sei also ab jetzt n gerade, somit d ungerade. $\varphi(2^\nu) = 2^{\nu-1}$ für für natürliches ν zeigt, dass in dem nun betrachteten Fall n nicht Potenz von 2 ist. Es gilt also $n = 2^\nu \Pi p_i^{\nu_i}$ mit ungeraden Primzahlen p_i und nichtleerem Produkt. d teilt $\varphi(n) = 2^{\nu-1} \Pi \varphi(p_i^{\nu_i})$. Ist q ein fester ungerader Primteiler von d, so muss q einen der Faktoren $\varphi(p_i^{\nu_i})$ teilen. Es sei dies etwa derjenige mit $i = j$. Wegen $q \mid (n-1)$ ist sicher $q \neq p_j$. Nach [1], Satz 46/47, ist die Anzahl der mod $p_j^{\nu_j}$ bzw. mod 2^ν inkongruenten Lösungen der Kongruenzen $x^q \equiv 1 \pmod{p_j^{\nu_j}}$ bzw. $x^q \equiv 1 \pmod{2^\nu}$ genau gleich q bzw. 1. Ist N bzw. N_i die Anzahl der mod 2^ν bzw. mod $p_i^{\nu_i}$ inkongruenten Lösungen von $x^q \equiv 1 \pmod{2^\nu}$ bzw. $x^q \equiv 1 \pmod{p_i^{\nu_i}}$, so ist $N \Pi N_i$ die Anzahl der mod n inkongruenten Lösungen von $x^q \equiv 1 \pmod{n}$ (siehe [1], § 14). Wegen $N_j = q \geq 3$ gibt es also $x \not\equiv 1 \pmod{n}$ mit $x^q \equiv 1 \pmod{n}$, also $x^d \equiv 1 \pmod{n}$, also schliesslich $x^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, womit alles bewiesen ist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Anmerkung der Redaktion: Ein (1) genügendes n wird Pseudoprimzahl bezüglich der Basis x genannt. Für Basen aus der Menge $M_n = \{x \mid x = kn + 1, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ ist jedes zusammengesetzte n Pseudoprimzahl. Die Frage von K. Szymiczek lautet: Welche zusammengesetzten n sind nur bezüglich der Elemente von M_n Pseudoprimzahlen? (Vgl. A. Rotkiewicz, Pseudoprime Numbers and their Generalisations, University of Novi Sad, 1972, p. 143.)

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), W. Herget (Braunschweig, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Chr. A. Meyer (Bern), R. Tichy (Wien, Österreich).

LITERATURVERZEICHNIS

1 E. Hecke: Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig, 1923.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Dezember 1977* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.
Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Bad 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 672 A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724 A (Band 30, p. 91), Problem 764 A (Band 31, p. 44).

Aufgabe 786. Es seien f, g multiplikative zahlentheoretische Funktionen, ferner

$$F(m)=\sum_{d/m} f(d)\,,\; G(n)=\sum_{d/n} g(d)\,;\; m,n\in\mathbf{N}\,.$$

Zu gegebenen natürlichen Zahlen a, b, m, n bezeichne r bzw. s den grössten Teiler von a bzw. b, welcher relativ prim zu m bzw. n ist. Schliesslich seien φ, ψ zwei durch die Beziehung

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m)x^m}{1-x^m}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi(n)y^n}{1-y^n}=\sum_{m,n=1}^{\infty} F(am)G(bn)x^m y^n$$

definierte zahlentheoretische Funktionen. Man zeige, dass

$$\varphi(m)\cdot\psi(n)=F(r)G(s)f(am/r)\,g(bn/s)$$

L. Kuipers, Mollens VS

Aufgabe 787. Ein konvexes n-Eck P_n soll durch Diagonalen in ein Viereck und $n-4$ Dreiecke zerlegt werden. Sei $z(n,k)$ die Anzahl der Zerlegungen, bei denen genau k Vierecksseiten mit Seiten von P_n übereinstimmen. Man bestimme $z(n,k)$. Die Gesamtzahl aller Zerlegungen ist dann $z(n)=\Sigma_{k=0}^{4} z(n,k)$; man bestimme $z(n)$ auch direkt.

J. Binz, Bern

Aufgabe 788. Im ebenen Dreieck mit den Seiten a, b, c mögen sich die Winkelhalbierende w_a, die Schwerelinie m_b und die Höhe h_c in einem Punkte schneiden.
1) Welche Anordnungsbeziehungen zwischen den Masszahlen von a, b, c sind möglich?
2) Welche von den 3 Innenwinkeln α, β, γ können $\geq 90°$ sein?
3) Man bestimme unter der Voraussetzung, das das Dreieck spitzwinklig ist, die bestmögliche untere Schranke für den Winkel α.

W. Florow, München, BRD