

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 32 (1977)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Eine besondere Art gleichseitiger Sechsecke  
**Autor:** Hohenberg, F.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32153>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Remark.* It should be noted that a completely different proof of these results may be given by using a result on Dedekind sums due to ROSEN [3].

John B. Friedlander and Kenneth H. Rosen,  
Massachusetts Institute of Technology Cambridge, USA

## REFERENCES

- 1 P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie*, Teubner, Leipzig, 1902, reprinted: Chelsea, New York, 1968.
- 2 I. NIVEN and H.S. ZUCKERMAN, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3rd ed., Wiley, New York, 1972.
- 3 K. H. ROSEN, *Congruences for Dedekind Sums*, to appear.

# Elementarmathematik und Didaktik

## Eine besondere Art gleichseitiger Sechsecke

Bei gleichseitigen Streckenzügen, deren Ecken abwechselnd auf zwei konzentrischen Kreisen liegen, gilt eine einfache Winkelbeziehung. Die Umkehrfrage führt in 1. auf besondere Sechsecke. Sie werden in 2. rein algebraisch gefunden. In 3. wird auf ein besonderes Gelenkviereck hingewiesen.

### 1. Definition und Eigenschaften der Sechsecke $\Sigma$

Gegeben seien in der euklidischen Ebene die Kreise  $k_0, k_1$  (Mitten  $K_0, K_1$ , Radien  $r_0, r_1$ , Abstand  $\overline{K_0K_1} = e$ ). Von einem Punkt  $0$  auf  $k_0$  und einem Punkt  $I$  auf  $k_1$  ausgehend, sei in Abb. 1 der Streckenzug  $\dots - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, \dots$  konstruiert, bei dem Nachbarecken den konstanten Abstand  $\overline{v, v+1} = \overline{0, I} = l$  haben ( $v$  ganz).  $a_v$  sei der (orientierte) Winkel der (orientierten) Geraden  $K_0K_1$  mit  $K_0v$  (wenn  $v$  gerade ist) bzw.  $K_1v$  ( $v$  ungerade).  $\bar{I}, \bar{2}$  seien die Fußpunkte der Normalen aus  $I$  bzw.  $2$  auf  $K_0K_1$ . Wegen  $\not K_1K_0I = (a_0 + a_2)/2$  und  $180^\circ - \not K_0K_12 = (a_1 + a_3)/2$  folgt

$$a) \operatorname{tg} \frac{a_0 + a_2}{2} = \frac{\bar{I}I}{K_0\bar{I}} = \frac{r_1 \sin a_1}{r_1 \cos a_1 + e}, \quad b) \operatorname{tg} \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{\bar{2}2}{K_1\bar{2}} = \frac{r_0 \sin a_2}{r_0 \cos a_2 - e}. \quad (1a, b)$$

Im Sonderfall  $e=0$  ist  $\operatorname{tg} \frac{a_0 + a_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{a_1}{2}, \dots$ . Es folgt  $a_v - 2a_{v+1} + a_{v+2} \equiv 0 \pmod{360^\circ}$ .

Wir stellen nun die Umkehrfrage: Besteht eine lineare Beziehung  $a_v + a_{v+2} = \lambda a_{v+1} + \mu$  mit Konstanten  $\lambda, \mu$  nur bei konzentrischen Kreisen? Nach (1a) müsste  $(a_0 + a_2) - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (r_1 \sin a_1 / (r_1 \cos a_1 + e)) = \lambda a_1 + \mu$  für alle  $a_1$  gelten. Hieraus folgt durch zweimalige Differentiation nach  $a_1$ : Für alle  $a_1$  muss  $er_1(r_1^2 - e^2) \sin a_1 / (e^2 + 2er_1 \cos a_1 + r_1^2)^2 = 0$  sein. Wegen  $r_1 \neq 0$  folgt, dass  $e=0$  oder  $e=r_1$  sein muss. Aus (1b) folgt ebenso, dass  $e=0$  oder  $e=r_2$  sein muss. Der Fall

$e=0, \lambda=2, \mu=0$  wurde oben erwähnt. Im zweiten Fall setzen wir  $e=r_0=r_1=r$  und erhalten aus (1a, b)  $\tg \frac{a_0+a_2}{2} = \tg \frac{a_1}{2}$  und  $\tg \frac{a_1+a_3}{2} = \tg \left(90^\circ + \frac{a_2}{2}\right)$ , daher  $A_0 = a_0 - a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod{360^\circ}$  und  $A_1 = a_1 - a_2 + a_3 \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$ , allgemein

$$A_v = a_v - a_{v+1} + a_{v+2} \equiv v \cdot 180^\circ \pmod{360^\circ}.$$

Aus (2) und  $A_{v+1} \equiv (v+1) \cdot 180^\circ \pmod{360^\circ}$  folgt durch Addition

$$B_v = a_v + a_{v+3} \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}.$$

Aus (3) und  $B_{v+3} \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$  folgt durch Subtraktion  $a_{v+6} \equiv a_v \pmod{360^\circ}$ .

Daher ist der Streckenzug hier ein geschlossenes gleichseitiges Sechseck  $\Sigma = 012345$ . Nach (3) ist  $\Sigma$  symmetrisch zur Chordalen  $s$  von  $k_0$  und  $k_1$ . In Abb. 2 wurden 0 und 1 gewählt; mit der Seitenlänge  $l = \overline{01}$  wurden daraus die übrigen Ecken 2, 3, 4, 5 von  $\Sigma$  konstruiert. Man könnte auch 0 und 2 wählen; dann ist 1 der von  $K_0$  verschiedene Schnittpunkt von  $k_1$  mit der Streckensymmetrale von 02.

Bemerkungen. 1. Es ist a)  $a_0 + a_2 + a_4 \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$  und b)  $a_1 + a_3 + a_5 \equiv 0 \pmod{360^\circ}$ . Beweis: Nach (2) ist  $a_0 - a_1 + a_2 \equiv 0 \pmod{360^\circ}$ , nach (3) ist  $a_1 + a_4 \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$ ; durch Addition folgt a). Wegen (3) ist  $(a_0 + a_3) + (a_1 + a_4) + (a_2 + a_5) \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$ , wegen a) gilt daher b).

2. Den Ecken  $v$  ( $v=0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) von  $\Sigma$  mögen auf  $k_0$  bzw.  $k_1$  die Punkte  $v'$  diametral gegenüberliegen. Zu  $v'$  gehört der Winkel  $a'_v = a_v + 180^\circ$ . (2) und (3) bleiben erfüllt, wenn man z. B. 0 und 3 festhält, aber 1, 2, 4, 5 durch 1', 2', 4', 5' ersetzt. So gehören zu jedem Sechseck  $\Sigma$  drei assoziierte Sechsecke  $\Sigma_0 = 01'2'3'4'5'$ ,  $\Sigma_1 = 0'12'3'4'5'$ ,  $\Sigma_2 = 0'1'23'4'5'$ . Auch  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  sind gleichseitig, sie haben aber im allgemeinen andere Seitenlängen als  $\Sigma$ . In Abb. 2 ist  $\Sigma_0$  gestrichelt gezeichnet.

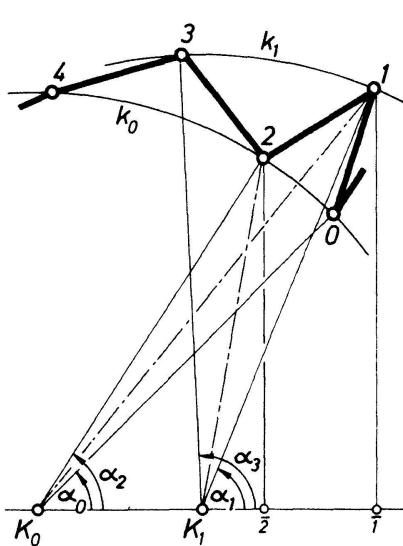


Abb. 1

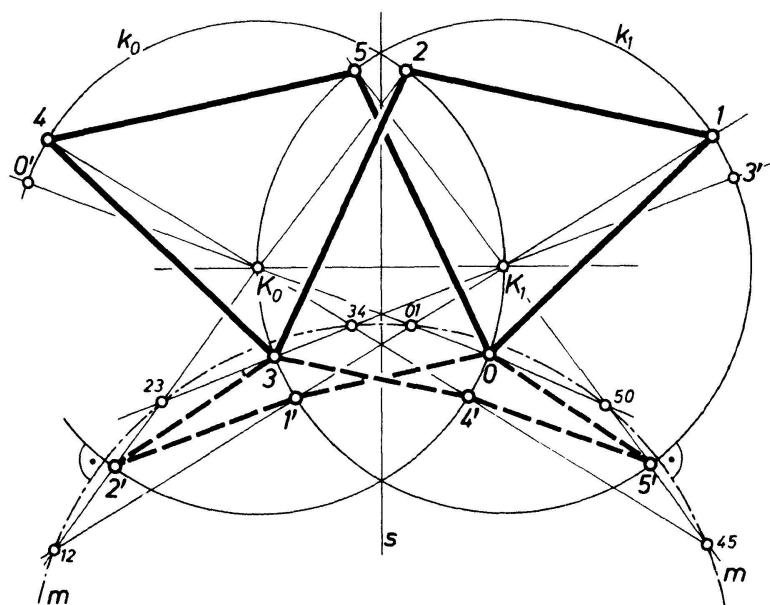


Abb. 2

3. Vergleich mit dem Fall  $e=0$ . Sind  $k_0$  und  $k_1$  konzentrisch und ist  $0$  auf  $k_0$  gewählt, so gibt es *abzählbar* viele Punkte  $1$  auf  $k_1$ , so dass der gleichseitige Streckenzug  $0123\dots$  sich schliesst;  $a_1 - a_0$  muss nämlich ein rationales Vielfaches von  $360^\circ$  sein. *Aber es gibt nichtabzählbar viele Sechsecke  $\Sigma$* , denn  $0$  auf  $k_0$  und  $1$  auf  $k_1$  kann man beliebig wählen. Auch wenn man (bei gegebenem  $r$ ) die Seitenlänge  $l = \sqrt{v}, v+1$  vorgibt, existieren nichtabzählbar viele Sechsecke  $\Sigma$ ; ihre Gestalt hängt von  $l$  und von der Wahl von  $0$  auf  $k_0$  ab. Reell können sie nur für  $l \leq 3r$  sein.

4. Die Figur zweier kongruenter Kreise  $k_0, k_1$ , deren Zentralabstand gleich dem Radius ist, ist wegen einer Ponceletschen Schliessungseigenschaft bekannt. Es gibt unendlich viele Vierecke, deren Ecken auf  $k_0$  liegen und deren Seiten  $k_1$  berühren («bizentrische Vierecke»); sie gehen durch Spiegelung an  $s$  in Vierecke mit dem Umkreis  $k_1$  und dem Inkreis  $k_0$  über. Es gibt auch andere Kreispaare mit dieser Eigenschaft<sup>1)</sup>. Durch die projektive Eigenschaft der «involutorischen Ponceletschen Viereckslage» sind also  $k_0, k_1$  noch nicht charakterisiert, wohl aber durch die metrische Forderung, dass bei einem gleichseitigen Streckenzug zwischen zwei nichtkonzentrischen Kreisen eine lineare Beziehung zwischen  $a_v + a_{v+2}$  und  $a_{v+1}$  besteht.

5. Bei anderer Gelegenheit soll gezeigt werden: Wenn man auf eine lineare Winkelbeziehung verzichtet, gibt es zu einem gegebenen Kreis  $k_0$  und zu gegebener Seitenlänge  $l$  unendlich viele Kreise  $k_1$  in der Ebene und im Raum, so dass unendlich viele Sechsecke mit der Seitenlänge  $l$  und mit Ecken  $0, 2, 4$  auf  $k_0$  und  $1, 3, 5$  auf  $k_1$  existieren. Der Fall kongruenter Kreise in einer Ebene, mit  $\overline{K_0K_1} = r$ , ist dadurch ausgezeichnet, dass hier Sechsecke  $\Sigma$  für *jeden* Wert von  $l$  existieren. (Reell sind sie für  $l \leq 3r$ .)

## 2. Algebraischer Nachweis der Sechsecke $\Sigma$

In 1. wurden die Sechsecke  $\Sigma$  auf Grund einer Winkelbeziehung und mittels zweimaliger Differentiation gefunden. Hier soll rein algebraisch gezeigt werden, dass bei zwei kongruenten Kreisen mit  $\overline{K_0K_1} = \text{Radius } r$  zu jeder Seitenlänge  $l$  unendlich viele Sechsecke  $\Sigma$  existieren. In Abb. 1 besteht nach Wahl von  $l$  zwischen den Punkten  $0$  von  $k_0$  und  $1$  von  $k_1$  eine (2,2)-Korrespondenz. Für eine bestimmte Lage von  $0$  und  $1$  ergibt sich der Punkt 2 linear aus 1, ..., der Punkt 6 linear aus 5. Daher besteht auch zwischen  $0$  und  $6$  eine (2,2)-Korrespondenz. Man kann nach Punkten  $0$  fragen, die mit dem entsprechenden Punkt 6 zusammenfallen. In einer rationalen Parameterdarstellung von  $k_0$  mögen  $0$  und  $6$  die Parameterwerte  $t_0$  und  $t_6$  haben. Die Korrespondenz ist durch eine in  $t_0$  und in  $t_6$  quadratische Gleichung dargestellt; die Forderung  $t_6 = t_0$  ergibt eine Gleichung 4. Grades für  $t_0$ . Kann man mehr als vier Wurzeln dieser Gleichung nachweisen, so folgt, dass die Gleichung identisch erfüllt ist und jeder Punkt 6 mit 0 zusammenfällt (Chasles'sches Korrespondenzprinzip). Im Fall  $r_0 = r_1 = e$  kann man mehr als vier Wurzeln angeben:

a) Die Kreise um  $K_1$  mit den Radien  $|r \pm l|$  schneiden  $k_0$  in vier Punkten; in Abb. 3 sind zwei dieser Schnittpunkte reell, einer ist mit  $0$  bezeichnet.  $1$  sei ein Schnitt-

<sup>1)</sup> R. FELGITSCHER, *Über die Erzeugung von Flächen zweiten Grades durch c-kongruente Ebenenbüschel*, Diss. T. H. Wien 1944, und J. KRAMES, *Über Kegelschnitte in Ponceletscher Viereckslage*, Sitz.-Ber. Öst. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl., Abt. II, 181, 175–201 (1973).

punkt von  $OK_1$  mit  $k_1$ . Die Spiegelung an  $s$  führt  $0$  in  $3$ ,  $1$  in  $2$  über.  $12$  schneide  $k_0$  noch in  $I$ . Dann ist  $K_0K_1II$  ein Rhombus;  $OK_1K_0$  und  $I2K_0$  sind kongruente gleichschenklige Dreiecke. Daher ist  $\overline{OI} = \overline{I2}$ , und  $0, 1, 2, 3, 4 = 2, 5 = 1$  sind Ecken eines Sechsecks  $\Sigma$ , bei dem  $12$  und  $45$ ,  $01$  und  $50$ ,  $23$  und  $34$  sich decken. Damit sind vier Sechsecke gefunden.

b) Abb. 4 zeigt ein fünftes Sechseck.  $0$  und  $3$  seien auf  $K_0K_1$  angenommen,  $0 \neq K_1, 3 \neq K_0$ . Der Kreis um  $0$  mit dem Radius  $l$  schneide  $k_1$  in  $I$  und  $5$ . Die Spiegelung an  $s$  führt  $k_0$  in  $k_1$ ,  $0$  in  $3$  über; sie führt  $I$  in  $4$ ,  $5$  in  $2$  über. Wegen der Symmetrie gehen  $12$  und  $45$  durch den Mittelpunkt  $K$  von  $K_0K_1$ . Zu zeigen ist, dass  $\overline{I2} = \overline{45} = l$  ist.  $K_0$  und  $3$  teilen die Strecke  $OK$  innerlich und äußerlich im Verhältnis  $2:1$ , für jeden Punkt  $I$  von  $k_1$  gilt daher  $\overline{OI} = 2 \cdot \overline{KI}$ ; da  $K$  Mittelpunkt von  $12$  ist, ist  $\overline{I2} = l$ . Analog folgt  $\overline{45} = l$ . Damit ist die Existenz der Sechsecke  $\Sigma$  für beliebige Wahl von  $0$  und  $1$  bewiesen.

c) Auch andere Sechsecke  $\Sigma$  lassen sich unmittelbar erkennen. In Abb. 5 ist  $0=3$  einer der Schnittpunkte von  $k_0$  und  $k_1$ . Der Kreis mit dem Radius  $l$  um  $0=3$  schneide  $k_0$  noch in  $2$  und  $4$ . Die Drehung um  $0=3$  durch  $+60^\circ$  führt  $k_0$  in  $k_1$  über; sie führt  $2$  in  $1$  und  $4$  in  $5$  über. Dann sind  $012$  und  $345$  gleichseitige Dreiecke, und  $012345$  ist ein Sechseck  $\Sigma$ .

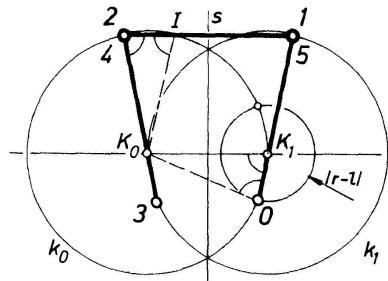


Abb. 3

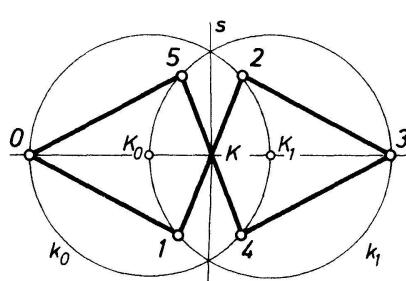


Abb. 4

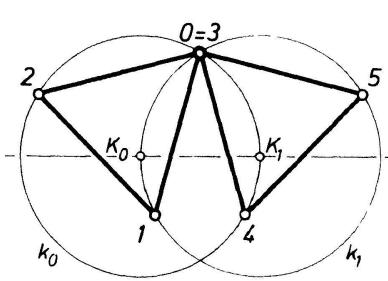


Abb. 5

### 3. Kinematische Deutung der Sechsecke $\Sigma$

Ein Gelenkviereck (Dreistabgetriebe), dessen Arme dieselbe Länge haben wie der Steg  $K_0K_1$ , hat nach 1. die besondere Eigenschaft, dass man aus den Lagen der Koppel unendlich viele gleichseitige Sechsecke  $\Sigma$  bilden kann. Zu jeder Lage der Koppel, etwa  $0, 1$ , gehört als Momentanpol  $01$  der Schnittpunkt der Arme  $K_00, K_11$ .

Man findet (Abb. 2): a) Vier assoziierte Sechsecke  $\Sigma, \Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  besitzen dieselben Momentanpole  $01, 12, 23, 34, 45, 50$ . b) Diese Momentanpole liegen auf einem Kreis  $m$ , der  $k_0$  und  $k_1$  orthogonal schneidet; der Mittelpunkt von  $m$  hat von  $K_0K_1$  den Abstand  $r$   $(\sin^2 a_0 + \sin^2 a_2 + \sin^2 a_4)/4 \sin a_0 \sin a_2 \sin a_4$ . c) Die Koppellagen (= Seiten aller Sechsecke  $\Sigma$ , die in  $k_0, k_1$  und  $l$  übereinstimmen) umhüllen eine Kurve 6. Klasse.

Zu einer räumlichen Verallgemeinerung gelangt man, wenn man einen der beiden Kreise  $k_0, k_1$  normal zu seiner Ebene verschiebt.  $\Sigma$  ist dann ein räumliches gleichseitiges Sechseck. Die Seiten aller Sechsecke  $\Sigma$ , die  $k_0$  und  $k_1$  und die Seitenlänge  $l$  gemein haben, bilden die Erzeugenden einer Regelfläche 6. Grades vom Geschlecht 1. Ihre Doppelkurve zerfällt in  $k_0, k_1$ , in einen Fernkreis und in eine ebene Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht 1; diese liegt in der Ebene, die durch  $K_0K_1$  geht und normal zu den Ebenen von  $k_0$  und  $k_1$  ist.

F. Hohenberg, Graz