

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 32 (1977)  
**Heft:** 2  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Da alle  $|x_n| \geq 1$  sind, muss es also ein  $n_0$  geben so, dass  $x_n \in \{+1, -1\}$  für alle  $n \geq n_0$ .  $x_{n-1} = x_n$  für ein  $n > n_0$  impliziert nach (6) und (7)  $b_{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , also  $b_{n-1} = 1$ , was  $a_n x_{n+1} = 0$  liefern würde. So ist  $x_n = -x_{n-1}$  für alle  $n > n_0$ , also  $(1 + b_{n-1})x_{n-1} = a_n x_{n+1}$  und somit  $1 + b_{n-1} = a_n$  für alle  $n > n_0$ . Nach (6) hat man  $a_n = p, b_{n-1} = p - 1$  für diese  $n$ , was den Satz vollständig beweist.

Das *Analogon zum Eulerschen Satz* ist natürlich hier auch richtig: Hat  $\xi \in \mathbf{Q}_p$  einen unendlichen periodischen  $p$ -Kettenbruch mit einer Periode, die nicht von der Form des obigen Satzes ist, so ist  $\xi$  eine quadratische Irrationalität. Ob die Umkehrung hiervon, also das *Analogon zum Satz von Lagrange*, richtig ist, bleibt ein interessantes offenes Problem; man siehe dazu auch [5]. Jedenfalls scheinen sich die aus dem Reellen bekannten Beweismethoden für diese Umkehrung im  $p$ -adischen Fall nicht zu bewähren.

In dieser Situation kann man wenigstens folgendes tun: Man nehme spezielle quadratische Polynome der Form  $X^2 - c$  mit  $c \in \mathbf{Z}$  und nicht Quadratzahl; ist die

Primzahl  $p \neq 2$  kein Teiler von  $c$  und ist das Legendre-Symbol  $\left(\frac{c}{p}\right)$  gleich +1,

so zerfällt  $X^2 - c$  über  $\mathbf{Q}_p$ , aber nicht über  $\mathbf{Q}$ , in Linearfaktoren  $(X - \xi)(X - \eta)$ . Nun lasse man einen Computer ein hinreichend langes Anfangsstück der  $p$ -Kettenbruchentwicklung für eines der  $\xi, \eta \in \mathbf{Q}_p$  berechnen. In den Fällen  $(p, c) = (5, -1)$ ,  $(7, 2)$ ,  $(11, 5)$ ,  $(13, 3)$  wurden jeweils die ersten fünfhundert Elemente  $a_v, b_v$  des  $p$ -Kettenbruchs tatsächlich ermittelt; dabei zeichnete sich in keinem Fall eine Periodizität ab. Diese Rechnungen wurden auf der Anlage CYBER 76/72 von Control Data am Rechenzentrum der Universität zu Köln durch Herrn Dr. M. Pohst durchgeführt, der auch das Programm geschrieben hat und dem an dieser Stelle nochmals gedankt sei.

P. Bundschuh, Universität Köln

## LITERATUR

- [1] S.I. BOREWICZ und I.R. ŠAFAREVIČ, *Zahlentheorie*, Birkhäuser-Verlag, Basel/Stuttgart, 1966.
- [2] K. MAHLER, *On a geometrical representation of  $p$ -adic numbers*, Ann. of Math. 41, 8–56 (1940).
- [3] K. MAHLER, *Lectures on diophantine approximations* (Part 1), University of Notre Dame, 1961.
- [4] O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 2. Aufl., 1929; Repr. by Chelsea Publ. Comp., New York, N.Y.
- [5] TH. SCHNEIDER, *Über  $p$ -adische Kettenbrüche*, Symposia Math. Vol. IV, 181–189 (1970).

## Aufgaben

**Aufgabe 761.** In einer Ebene seien ein Dreieck  $ABC$  sowie ein Punkt  $P$  gegeben.  $A'B'C'$  bezeichne das aus  $ABC$  durch Punktspiegelung an  $P$  entstehende Dreieck. Eine durch  $P$  verlaufende Gerade schneide  $B'C'$  in  $A_1$ ,  $C'A'$  in  $B_1$ ,  $A'B'$  in  $C_1$ . Man zeige, dass sich die Geraden  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  in einem Punkt schneiden.

G. Bercea, München, BRD

**1. Lösung.** Durch die 6 Punkte  $A, B, C, A', B', C'$  geht genau ein Kegelschnitt  $K$  mit Zentrum  $P$ . Es sei  $S$  der Schnittpunkt der Geraden  $AA_1$  mit  $K$  und  $B^*$  der Schnittpunkt der Geraden  $BS$  und  $A'C'$ . Nun wenden wir den Satz von Pascal auf das dem Kegelschnitt  $K$  einbeschriebene Sechseck mit den Ecken  $B, A, C', A', B', S$  an. Danach sind die 3 Punkte  $BB' \cap AA' = P$ ,  $AS \cap C'B' = A_1$  und  $BS \cap C'A' = B^*$  kollinear. Es gilt also  $B^* = B_1$ , und somit liegt  $S$  auf der Geraden  $BB_1$ . Ganz analog zeigt man, dass  $S$  auch auf der Geraden  $CC_1$  liegt. Die drei Geraden  $AA_1$ ,  $BB_1$  und  $CC_1$  schneiden sich also im Punkt  $S$  auf dem Kegelschnitt  $K$ .

D. Stoffer, Zürich

**2. Lösung mit Verallgemeinerung.** In der Ebene des Dreiecks  $ABC$  seien die getrennt liegenden Punkte  $P$  und  $Q$  gegeben. Die Gerade  $d = PQ$  schneide  $BC$  in  $A_0$ ,  $CA$  in  $B_0$ ,  $AB$  in  $C_0$ . Die zu  $A_0, B_0, C_0$  bezüglich  $P$  und  $Q$  harmonischen Punkte seien  $A_1, B_1, C_1$ . Dann bestimmen die Punktpaare  $(A_0, A_1)$ ,  $(B_0, B_1)$ ,  $(C_0, C_1)$  auf der Geraden  $d$  die Involution  $I$  mit den Fixpunkten  $P$  und  $Q$ . Es sei  $AA_1 \cap BB_1 = D$ . Die Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks  $ABCD$  schneiden  $D$  in Punktpaaren der Involution  $J$ . Die beiden Gegenseitenpaare  $(BC, AD)$  und  $(AC, BD)$  liefern auf  $d$  die Punktpaare  $(A_0, A_1)$  und  $(B_0, B_1)$  von  $J$ . Da diese Punktpaare auch der Involution  $I$  angehören, ist  $I$  mit  $J$  identisch. Da die Gerade  $AB$  des dritten Gegenseitenpaars die Gerade  $d$  in  $C_0$  schneidet, muss die zugehörige Gegenseite  $CD$  durch  $C_1$  gehen. Die Geraden  $AA_1, BB_1, CC_1$  schneiden sich somit im Punkt  $D$ . Die ursprüngliche Aufgabe ergibt sich, wenn man für  $Q$  den Fernpunkt von  $d$  wählt. Anmerkung. Es gilt auch der zur Aufgabe duale Satz.

K. Grün, Linz, Österreich

Weitere Lösungen sandten K. Bindschedler (Küschnacht), J. T. Groenman (Groningen, Niederlande), L. Kuipers (Mollens VS), P. Nüesch (Lausanne) und M. Vowe (Therwil BL).

**Aufgabe 762.** Man zeige für alle  $n \in \mathbb{N}$ : Es gibt kein  $n$ -tupel  $(f_1(x), \dots, f_n(x))$  nichtkonstanter Polynome mit reellen Koeffizienten derart, dass für jede natürliche Zahl  $x_0$  mindestens eine der Zahlen  $f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)$  eine Primzahl ist.

E. Teuffel, Korntal, BRD

**Lösung des Aufgabenstellers.**  $(f_1(x), \dots, f_n(x))$  sei doch ein solches  $n$ -tupel, und zwar eines mit minimalem  $n$ . Dann ist jedes  $f_i(x)$  Primzahl für unendlich viele  $x \in \mathbb{N}$ . Damit folgt aus der Lagrange'schen Interpolationsformel, dass die Koeffizienten aller  $f_i$  rational sind. Wir wählen nun  $x_1 \in \mathbb{N}$  so gross, dass für  $x \geq x_1$  und  $i = 1, \dots, n$  folgende Bedingungen erfüllt sind: 1.  $f_i(x) > 1$ , 2.  $f_i(x)$  streng monoton wachsend. Sei

$$f_i(x) = \sum_{k=0}^{k_i} a_{ik} x^k, \quad a_{ik_i} > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Bezeichnet  $a$  den Hauptnenner aller  $a_{ik}$ , so gilt

$$A := a^{n+1} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen, dass keine der Zahlen  $f_i(x_1+A)$  ( $i=1, \dots, n$ ) Primzahl ist und haben damit einen Widerspruch. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} f_i(x_1+A) &= \sum_{k=0}^{k_i} a_{ik} (x_1+A)^k = f_i(x_1) + \frac{A}{a} \sum_{k=0}^{k_i} a a_{ik} \sum_{m=1}^k \binom{k}{m} A^{m-1} x_1^{k-m} \\ &= f_i(x_1) + a^n f_1(x_1) \cdots f_n(x_1) \cdot B \quad \text{mit } B \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ist also  $f_i(x_1)$  nicht ganzzahlig, so ist auch  $f_i(x_1+A)$  nicht ganzzahlig. Ist aber  $f_i(x_1)$  ganzzahlig, also nach 1. eine natürliche Zahl  $> 1$ , so enthält  $f_i(x_1+A)$  den echten Teiler  $f_i(x_1)$ , ist also keine Primzahl.

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln BRD), H. Harborth (Braunschweig BRD) und L. Kuipers (Mollens VS).

**Aufgabe 763.** Man zeige für alle  $n \in \mathbb{N}$ : Es gibt kein  $n$ -tupel  $(f_1(x), \dots, f_n(x))$  von Polynomen mindestens 2. Grades mit reellen Koeffizienten derart, dass jede Primzahl  $p$  eine Darstellung  $p = f_i(x_0)$  mit  $1 \leq i \leq n$  und  $x_0 \in \mathbb{N}$  besitzt.

E. Teuffel, Korntal, BRD

**1. Lösung.** Angenommen, es gäbe doch ein solches  $n$ -tupel  $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Wir dürfen dann ferner annehmen, dass es zu jedem  $i \in \{1, \dots, n\}$  unendlich viele Primzahlen  $p$  gibt derart, dass  $p = f_i(x)$  mit geeigneten  $x \in \mathbb{N}$ . Dann ist für  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$f_i(x) = \sum_{k=0}^{k_i} a_{ik} x^k \text{ mit } a_{ik} \in \mathbb{Q}, a_i := a_{ik_i} > 0, k_i \geq 2.$$

Es ist klar, dass es ein  $p_0$  gibt so, dass alle Primzahlen  $p \geq p_0$  als  $f_i(x)$  dargestellt werden können. Bezeichnet  $\pi_0(y)$  die Anzahl der Primzahlen  $p$  mit  $p_0 \leq p \leq y$ , so gilt nach dem Primzahlsatz für grosses  $y$

$$\pi_0(y) = (y/\log y) (1 + o(1)) \geq y/(2 \log y). \quad (1)$$

Andererseits hat man bei festem  $i \in \{1, \dots, n\}$  für die Anzahl  $A_i(y)$  der  $x \in \mathbb{N}$  mit  $f_i(x) \leq y$ :

$$A_i(y) = (y/a_i)^{1/k_i} (1 + o(1)) \leq 2 (y/a_i)^{1/2}.$$

Daher gilt bei grossem  $y$  für die Anzahl  $A(y)$  der natürlichen Zahlen  $m \leq y$ , die in der Form  $m = f_i(x)$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  darstellbar sind:

$$A(y) \leq 2 y^{1/2} \sum_{i=1}^n a_i^{-1/2} =: C \cdot y^{1/2}. \quad (2)$$

Unsere Annahme führt zu  $\pi_0(y) \leq A(y)$ , woraus wir mittels (1) und (2) den gewünschten Widerspruch ableiten.

P. Bundschuh, Köln, BRD

**2. Lösung.** Für jedes  $n$ -tupel  $(f_1(x), \dots, f_n(x))$  reeller Polynome mindestens zweiten Grades ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{x \in \mathbb{N} \\ f_i(x) \neq 0}} 1/f_i(x)$$

absolut konvergent. Andererseits ist bekanntlich die über alle Primzahlen  $p$  erstreckte Summe  $\sum 1/p$  divergent. Daraus folgt die Behauptung unmittelbar.

E. Teuffel, Korntal, BRD

Weitere Lösungen sandten H. Harborth (Braunschweig BRD) und E. Teuffel (Korntal BRD, 2. Lösung).

**Aufgabe 764.** Man bestimme den Rang der  $(p-1)$ -reihigen zirkulanten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p-2 & p-1 \\ 2 & 3 & \dots & p-1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p-1 & 1 & & p-3 & p-2 \end{pmatrix}$$

im Primkörper der Charakteristik  $p, p \geq 3$ .

K. Spindelböck, Graz, Österreich

**Solution.** Set  $n = p-1$  and let

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_0 \\ a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & \dots & a_{n-2} \end{pmatrix},$$

where  $a_0, \dots, a_{n-1}$  are elements of the Galois field  $k = GF(p)$ . Let  $P$  denote the special case in which  $a_0 = 1, a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ . Then  $P^2 = E$ , so  $P$  is non-singular, and

$$PA = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

It is well known that the cyclic matrix  $PA$  is similar to a diagonal matrix whose elements are

$$\lambda = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1},$$

where  $\omega$  runs over the  $n$ -th roots of unity. In our case the  $\omega$  are precisely the non-zero elements of  $k$ :

$$\omega = 1, 2, \dots, n = p - 1,$$

by the little Fermat theorem. It follows that  $\text{rank } (A) = \text{rank } (PA) = n - s$ , where  $s$  is the number of distinct zeros in  $k \setminus \{0\}$  of

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

For the matrix in our problem,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (p-1)x^{p-2} \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1})' \\ &= \left( \frac{x^p - 1}{x - 1} \right)' \\ &= \left( \frac{(x-1)^p}{x-1} \right)' \\ &= (p-1)(x-1)^{p-2}. \end{aligned}$$

Hence  $x = 1$  is the only zero of  $f(x)$ , so  $s = 1$  and  $\text{rank } (A) = p - 2$ .

Harley Flanders, Tel Aviv, Israel

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), H. Augustin (Saarbrücken BRD), C. Bindschedler (Küschnacht), P. Bundschuh (Köln BRD), H. Harborth (Braunschweig BRD), W. Herget (Braunschweig BRD), L. Kuipers (Mollens VS), D. Stoffer (Zürich), und M. Vowe (Therwil BL).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1977* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p.67), Problem 625B (Band 25, p.68), Problem 645A (Band 26, p.46), Problem 672A (Band 27, p.68), Aufgabe 680 (Band 27, p.116), Problem 724A (Band 30, p.91), Problem 764A (Band 31, p.44).

**Aufgabe 783.** Es bezeichne  $[x]$  die grösste ganze Zahl  $\leq x$ .  $A$  sei die durch  $a_1 = 1, a_{n+1} = [a_n + 2\sqrt{a_n}], n \in \mathbb{N}$  definierte Teilmenge von  $\mathbb{N}$ . Ferner seien  $B = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots\}$  und  $C = \{1, 16^1, 16^2, \dots\}$ . Man beweise, dass  $A \cap B = C$ .

(Vgl. Problem E 2619\*, Amer. Math. Monthly, Vol. 83, p. 740, 1976.)

E. Trost, Zürich

**Aufgabe 784.** Ist keine der positiven ganzen Zahlen  $a, b, ab$  eine Quadratzahl, so werden durch

$$(1 + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab})^n = x_n + y_n\sqrt{a} + z_n\sqrt{b} + w_n\sqrt{ab}, n = 0, 1, \dots$$

einheitig vier ganzzahlige Folgen  $(x_n), (y_n), (z_n), (w_n)$  definiert. Man zeige, dass diese vier Folgen derselben 4gliedrigen Rekursionsformel genügen und dass jede derselben als Summe von vier geometrischen Folgen mit verschiedenen Quotienten dargestellt werden kann. Man beweise schliesslich, dass für alle  $n$  die Determinante  $x_n w_n - y_n z_n = 0$  ist.

J. Binz, Bolligen

**Aufgabe 785.** Als Ableitung einer  $n$ -stelligen Folge aus Nullen und Einsen (0–1-Folge) sei diejenige  $(n-1)$ -stellige 0–1-Folge definiert, deren  $i$ -te Ziffer durch die Summe (mod 2) aus  $i$ -ter und  $(i+1)$ -ter Ziffer der Ausgangsfolge gegeben ist. Welches ist die grösstmögliche Anzahl von Einsen, die insgesamt in einer  $n$ -stelligen 0–1-Folge zusammen mit allen  $n-1$ -Ableitungen vorkommen können?

H. Harborth, Braunschweig, BRD

## Literaturüberschau

*Grundzüge der modernen Analysis, Band 2.* Von J. DIEUDONNÉ. 507 Seiten. DM 75,-. Logik und Grundlagen der Mathematik, Band 17. Vieweg Verlag, Braunschweig 1975.

Inhalt (die Numerierung setzt die im Band 1 verwendete fort): 12. Topologie und topologische Algebra. 13. Integration. 14. Integration auf lokalkompakten Gruppen. 15. Normierte Algebren und Spektraltheorie. Anhang: Ergänzungen und Änderungen zur zweiten Auflage des ersten Bandes. Literatur. Bezeichnungen. Sachverzeichnis.

Es handelt sich um die Übersetzung von *Eléments d'Analyse, Tome II* (Gauthier-Villars, Paris 1969). Kapitel 12 ist knapp gehalten und in Anbetracht auf die späteren Anwendungen auf das Studium separabler metrisierbarer Unterräume uniformisierbarer Räume ausgerichtet. Weitere wichtige Gegenstände sind die topologischen Gruppen sowie der Satz von Baire (in einer recht allgemeinen Form) mit Anwendungen. Kapitel 13 handelt von der Integrationstheorie auf metrisierbaren separablen lokalkompakten Räumen. Naturgemäß ist ein grosser Teil dieses Kapitels masstheoretischen Fragen gewidmet. Kapitel 14 ist unter anderem eine Vorbereitung für die in einem späteren Band folgende Theorie der Lie-Gruppen. Es wird jedoch Wert auf die Feststellung gelegt, dass die Integrationstheorie auf einer metrisierbaren separablen lokalkompakten Gruppe unabhängig von jeder Differentialstruktur entwickelt werden kann. Kapitel 15 ist eine Weiterführung des Kapitels 11 des ersten Bandes. Es folgt dem Konzept der Gelfandschen Theorie der normierten Algebren. Zentral ist hier die Frage der Darstellung von Algebren mit Involutionen als Operatoralgebren von Hilberträumen.

Wie im ersten Band sind die einzelnen Abschnitte von Aufgabenserien begleitet, die sehr oft auch Ausblicke in nicht behandelte Gegenstände gewähren. Dieser zweite Band schliesst sich in seiner Tragweite würdig an den ersten an.

J. RÄTZ