Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 2

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Da alle $|x_n| \geq 1$ sind, muss es also ein n_0 geben so, dass $x_n \in \{+1, -1\}$ für alle $n \geq n_0$. $x_{n-1} = x_n$ für ein $n > n_0$ impliziert nach (6) und (7) $b_{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$, also $b_{n-1} = 1$, was $a_n x_{n+1} = 0$ liefern würde. So ist $x_n = -x_{n-1}$ für alle $n > n_0$, also $(1 + b_{n-1}) x_{n-1} = a_n x_{n+1}$ und somit $1 + b_{n-1} = a_n$ für alle $n > n_0$. Nach (6) hat man $a_n = p, b_{n-1} = p - 1$ für diese n, was den Satz vollständig beweist.

Das *Analogon zum Eulerschen Satz* ist natürlich hier auch richtig: Hat $\xi \in \mathbf{Q}_p$ einen unendlichen periodischen p-Kettenbruch mit einer Periode, die nicht von der Form des obigen Satzes ist, so ist ξ eine quadratische Irrationalität. Ob die Umkehrung hiervon, also das *Analogon zum Satz von Lagrange,* richtig ist, bleibt ein interessantes offenes Problem; man siehe dazu auch [5]. Jedenfalls scheinen sich die aus dem Reellen bekannten Beweismethoden für diese Umkehrung im p-adischen Fall nicht zu bewähren.

In dieser Situation kann man wenigstens folgendes tun: Man nehme spezielle quadratische Polynome der Form $X^2 - c$ mit $c \in \mathbf{Z}$ und nicht Quadratzahl; ist die Primzahl $p \neq 2$ kein Teiler von c und ist das Legendre-Symbol $\left(\frac{c}{p}\right)$ gleich $+1$, so zerfällt $X^2 - c$ über $\mathbf{Q}_p$, aber nicht über $\mathbf{Q}$, in Linearfaktoren $(X - \xi)(X - \eta)$. Nun lasse man einen Computer ein hinreichend langes Anfangsstück der p-Kettenbruchentwicklung für eines der $\xi, \eta \in \mathbf{Q}_p$ berechnen. In den Fällen $(p, c) = (5, -1)$, $(7, 2)$, $(11, 5)$, $(13, 3)$ wurden jeweils die ersten fünfhundert Elemente a_ν, b_ν des p-Kettenbruchs tatsächlich ermittelt; dabei zeichnete sich in keinem Fall eine Periodizität ab. Diese Rechnungen wurden auf der Anlage CYBER 76/72 von Control Data am Rechenzentrum der Universität zu Köln durch Herrn Dr. M. Pohst durchgeführt, der auch das Programm geschrieben hat und dem an dieser Stelle nochmals gedankt sei.

P. Bundschuh, Universität Köln

LITERATUR

[1] S.I. Borewicz und I.R. Šafarevič, *Zahlentheorie,* Birkhäuser-Verlag, Basel/Stuttgart, 1966.
[2] K. Mahler, *On a geometrical representation of p-adic numbers,* Ann. of Math. *41*, 8–56 (1940).
[3] K. Mahler, *Lectures on diophantine approximations* (Part 1), University of Notre Dame, 1961.
[4] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen,* 2.Aufl., 1929; Repr. by Chelsea Publ. Comp., New York, N.Y.
[5] Th. Schneider, *Über p-adische Kettenbrüche,* Symposia Math. Vol. IV, 181–189 (1970).

Aufgaben

Aufgabe 761. In einer Ebene seien ein Dreieck ABC sowie ein Punkt P gegeben. $A'B'C'$ bezeichne das aus ABC durch Punktspiegelung an P entstehende Dreieck. Eine durch P verlaufende Gerade schneide $B'C'$ in A_1, $C'A'$ in B_1, $A'B'$ in C_1. Man zeige, dass sich die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkt schneiden.

G. Bercea, München, BRD

1. Lösung. Durch die 6 Punkte A, B, C, A', B', C' geht genau ein Kegelschnitt K mit Zentrum P. Es sei S der Schnittpunkt der Geraden AA_1 mit K und B^* der Schnittpunkt der Geraden BS und $A'C'$. Nun wenden wir den Satz von Pascal auf das dem Kegelschnitt K einbeschriebene Sechseck mit den Ecken B, A, C', A', B', S an. Danach sind die 3 Punkte $BB' \cap AA' = P$, $AS \cap C'B' = A_1$ und $BS \cap C'A' = B^*$ kollinear. Es gilt also $B^* = B_1$, und somit liegt S auf der Geraden BB_1. Ganz analog zeigt man, dass S auch auf der Geraden CC_1 liegt. Die drei Geraden AA_1, BB_1 und CC_1 schneiden sich also im Punkt S auf dem Kegelschnitt K.

D. Stoffer, Zürich

2. Lösung mit Verallgemeinerung. In der Ebene des Dreiecks ABC seien die getrennt liegenden Punkte P und Q gegeben. Die Gerade $d = PQ$ schneide BC in A_0, CA in B_0, AB in C_0. Die zu A_0, B_0, C_0 bezüglich P und Q harmonischen Punkte seien A_1, B_1, C_1. Dann bestimmen die Punktepaare (A_0, A_1), (B_0, B_1), (C_0, C_1) auf der Geraden d die Involution I mit den Fixpunkten P und Q. Es sei $AA_1 \cap BB_1 = D$. Die Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks $ABCD$ schneiden D in Punktepaaren der Involution J. Die beiden Gegenseitenpaare (BC, AD) und (AC, BD) liefern auf d die Punktepaare (A_0, A_1) und (B_0, B_1) von J. Da diese Punktepaare auch der Involution I angehören, ist I mit J identisch. Da die Gerade AB des dritten Gegenseitenpaares die Gerade d in C_0 schneidet, muss die zugehörige Gegenseite CD durch C_1 gehen. Die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 schneiden sich somit im Punkt D. Die ursprüngliche Aufgabe ergibt sich, wenn man für Q den Fernpunkt von d wählt.
Anmerkung. Es gilt auch der zur Aufgabe duale Satz.

K. Grün, Linz, Österreich

Weitere Lösungen sandten K. Bindschedler (Küsnacht), J. T. Groenman (Groningen, Niederlande), L. Kuipers (Mollens VS), P. Nüesch (Lausanne) und M. Vowe (Therwil BL).

Aufgabe 762. Man zeige für alle $n \in \mathbf{N}$: Es gibt kein n-tupel $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ nichtkonstanter Polynome mit reellen Koeffizienten derart, dass für jede natürliche Zahl x_0 mindestens eine der Zahlen $f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0)$ eine Primzahl ist.

E. Teuffel, Korntal, BRD

Lösung des Aufgabenstellers. $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ sei doch ein solches n-tupel, und zwar eines mit minimalem n. Dann ist jedes $f_i(x)$ Primzahl für unendlich viele $x \in \mathbf{N}$. Damit folgt aus der Lagrange'schen Interpolationsformel, dass die Koeffizienten aller f_i rational sind. Wir wählen nun $x_1 \in \mathbf{N}$ so gross, dass für $x \geqslant x_1$ und $i = 1, \ldots, n$ folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. $f_i(x) > 1$, 2. $f_i(x)$ streng monoton wachsend. Sei

$$f_i(x) = \sum_{k=0}^{k_i} a_{ik} x^k, \; a_{ik_i} > 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

Bezeichnet a den Hauptnenner aller a_{ik}, so gilt

$$A := a^{n+1} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \in \mathbf{N}.$$

Wir zeigen, dass keine der Zahlen $f_i(x_1+A)$ $(i=1,\ldots,n)$ Primzahl ist und haben damit einen Widerspruch. Tatsächlich ist

$$f_i(x_1+A)=\sum_{k=0}^{k_i} a_{ik}(x_1+A)^k=f_i(x_1)+\frac{A}{a}\sum_{k=0}^{k_i} aa_{ik}\sum_{m=1}^{k}\binom{k}{m}A^{m-1}x_1^{k-m}$$

$$=f_i(x_1)+a^n f_1(x_1)\cdots f_n(x_1)\cdot B \quad \text{mit } B\in\mathbf{N}.$$

Ist also $f_i(x_1)$ nicht ganzzahlig, so ist auch $f_i(x_1+A)$ nicht ganzzahlig. Ist aber $f_i(x_1)$ ganzzahlig, also nach 1. eine natürliche Zahl >1, so enthält $f_i(x_1+A)$ den echten Teiler $f_i(x_1)$, ist also keine Primzahl.
Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln BRD), H. Harborth (Braunschweig BRD) und L. Kuipers (Mollens VS).

Aufgabe 763. Man zeige für alle $n\in\mathbf{N}$: Es gibt kein n-tupel $(f_1(x),\ldots,f_n(x))$ von Polynomen mindestens 2. Grades mit reellen Koeffizienten derart, dass jede Primzahl p eine Darstellung $p=f_i(x_0)$ mit $1\le i\le n$ und $x_0\in\mathbf{N}$ besitzt.

E. Teuffel, Korntal, BRD

1. Lösung. Angenommen, es gäbe doch ein solches n-tupel $(f_1(x)\ldots,f_n(x))$. Wir dürfen dann ferner annehmen, dass es zu jedem $i\in\{1,\ldots,n\}$ unendlich viele Primzahlen p gibt derart, dass $p=f_i(x)$ mit geeigneten $x\in\mathbf{N}$. Dann ist für $i\in\{1,\ldots,n\}$:

$$f_i(x)=\sum_{k=0}^{k_i} a_{ik}x^k \text{ mit } a_{ik}\in\mathbf{Q},\ a_i:=a_{ik_i}>0,\ k_i\geqslant 2.$$

Es ist klar, dass es ein p_0 gibt so, dass alle Primzahlen $p\geqslant p_0$ als $f_i(x)$ dargestellt werden können. Bezeichnet $\pi_0(y)$ die Anzahl der Primzahlen p mit $p_0\le p\le y$, so gilt nach dem Primzahlsatz für grosses y

$$\pi_0(y)=(y/\log y)\,(1+o(1))\ge y/(2\log y). \tag{1}$$

Andererseits hat man bei festem $i\in\{1,\ldots,n\}$ für die Anzahl $A_i(y)$ der $x\in\mathbf{N}$ mit $f_i(x)\le y$:

$$A_i(y)=(y/a_i)^{1/k_i}(1+o(1))\le 2\,(y/a_i)^{1/2}.$$

Daher gilt bei grossem y für die Anzahl $A(y)$ der natürlichen Zahlen $m\le y$, die in der Form $m=f_i(x)$ für mindestens ein $i\in\{1,\ldots,n\}$ darstellbar sind:

$$A(y)\le 2y^{1/2}\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1/2}=:C\cdot y^{1/2}. \tag{2}$$

Unsere Annahme führt zu $\pi_0(y) \leq A(y)$, woraus wir mittels (1) und (2) den gewünschten Widerspruch ableiten.

P. Bundschuh, Köln, BRD

2. Lösung. Für jedes n-tupel $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ reeller Polynome mindestens zweiten Grades ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{x \in \mathbf{N} \\ f_i(x) \neq 0}} 1/f_i(x)$$

absolut konvergent. Andererseits ist bekanntlich die über alle Primzahlen p erstreckte Summe $\Sigma\, 1/p$ divergent. Daraus folgt die Behauptung unmittelbar.

E. Teuffel, Korntal, BRD

Weitere Lösungen sandten H. Harborth (Braunschweig BRD) und E. Teuffel (Korntal BRD, 2. Lösung).

Aufgabe 764. Man bestimme den Rang der $(p-1)$-reihigen zirkulanten Matrix

$$\begin{pmatrix} 1\,2 & \ldots & p-2 & p-1 \\ 2\,3 & \ldots & p-1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p-1\,1 & & p-3 & p-2 \end{pmatrix}$$

im Primkörper der Charakteristik $p, p \geq 3$.

K. Spindelböck, Graz, Österreich

Solution. Set $n = p-1$ and let

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \end{pmatrix},$$

where $a_0, \ldots, a_{n-1}$ are elements of the Galois field $k = GF(p)$. Let P denote the special case in which $a_0 = 1$, $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. Then $P^2 = E$, so P is non-singular, and

$$PA = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$$

It is well known that the cyclic matrix PA is similar to a diagonal matrix whose elements are

$$\lambda = a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + \cdots + a_{n-1}\omega^{n-1},$$

where ω runs over the n-th roots of unity. In our case the ω are precisely the non-zero elements of k:

$$\omega = 1, 2, \ldots, n = p-1,$$

by the little Fermat theorem. It follows that rank $(A) =$ rank $(PA) = n - s$, where s is the number of distinct zeros in $k \setminus \{0\}$ of

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

For the matrix in our problem,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (p-1)x^{p-2} \\ &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1})' \\ &= \left(\frac{x^p - 1}{x-1}\right)' \\ &= \left(\frac{(x-1)^p}{x-1}\right)' \\ &= (p-1)(x-1)^{p-2}. \end{aligned}$$

Hence $x = 1$ is the only zero of $f(x)$, so $s = 1$ and rank $(A) = p - 2$.

Harley Flanders, Tel Aviv, Israel

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), H. Augustin (Saarbrücken BRD), C. Bindschedler (Küsnacht), P. Bundschuh (Köln BRD), H. Harborth (Braunschweig BRD), W. Herget (Braunschweig BRD), L. Kuipers (Mollens VS), D. Stoffer (Zürich), und M. Vowe (Therwil BL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Oktober 1977* an *Dr. H. Kappus.* Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46), Problem 672A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724A (Band 30, p. 91), Problem 764A (Band 31, p. 44).

Aufgabe 783. Es bezeichne $[x]$ die grösste ganze Zahl $\leq x$. A sei die durch $a_1=1, a_{n+1}=[a_n+2\sqrt{a_n}]$, $n\in\mathbf{N}$ definierte Teilmenge von $\mathbf{N}$. Ferner seien $B=\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}$ und $C=\{1, 16^1, 16^2, \ldots\}$. Man beweise, dass $A\cap B=C$.
(Vgl. Problem E 2619*, Amer. Math. Monthly, Vol. 83, p. 740, 1976.)

E. Trost, Zürich

Aufgabe 784. Ist keine der positiven ganzen Zahlen a, b, ab eine Quadratzahl, so werden durch

$$(1+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab})^n=x_n+y_n\sqrt{a}+z_n\sqrt{b}+w_n\sqrt{ab}, n=0, 1, \ldots$$

eindeutig vier ganzzahlige Folgen (x_n), (y_n), (z_n), (w_n) definiert. Man zeige, dass diese vier Folgen derselben 4gliedrigen Rekursionsformel genügen und dass jede derselben als Summe von vier geometrischen Folgen mit verschiedenen Quotienten dargestellt werden kann. Man beweise schliesslich, dass für alle n die Determinante $x_nw_n-y_nz_n=0$ ist.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 785. Als Ableitung einer n-stelligen Folge aus Nullen und Einsen ($0-1$-Folge) sei diejenige $(n-1)$-stellige $0-1$-Folge definiert, deren $i-$te Ziffer durch die Summe (mod 2) aus $i-$ter und $(i+1)$-ter Ziffer der Ausgangsfolge gegeben ist. Welches ist die grösstmögliche Anzahl von Einsen, die insgesamt in einer n-stelligen $0-1$-Folge zusammen mit allen $n-1$-Ableitungen vorkommen können?

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Literaturüberschau

Grundzüge der modernen Analysis, Band 2. Von J. Dieudonné. 507 Seiten. DM 75,-. Logik und Grundlagen der Mathematik, Band 17. Vieweg Verlag, Braunschweig 1975.

Inhalt (die Numerierung setzt die im Band 1 verwendete fort): 12. Topologie und topologische Algebra. 13. Integration. 14. Integration auf lokalkompakten Gruppen. 15. Normierte Algebren und Spektraltheorie. Anhang: Ergänzungen und Änderungen zur zweiten Auflage des ersten Bandes. Literatur. Bezeichnungen. Sachverzeichnis.

Es handelt sich um die Übersetzung von *Eléments d'Analyse, Tome II* (Gauthier-Villars, Paris 1969). Kapitel 12 ist knapp gehalten und in Anbetracht auf die späteren Anwendungen auf das Studium separabler metrisierbarer Unterräume uniformisierbarer Räume ausgerichtet. Weitere wichtige Gegenstände sind die topologischen Gruppen sowie der Satz von Baire (in einer recht allgemeinen Form) mit Anwendungen. Kapitel 13 handelt von der Integrationstheorie auf metrisierbaren separablen lokalkompakten Räumen. Naturgemäss ist ein grosser Teil dieses Kapitels masstheoretischen Fragen gewidmet. Kapitel 14 ist unter anderem eine Vorbereitung für die in einem späteren Band folgende Theorie der Lie-Gruppen. Es wird jedoch Wert auf die Feststellung gelegt, dass die Integrationstheorie auf einer metrisierbaren separablen lokalkompakten Gruppe unabhängig von jeder Differentialstruktur entwickelt werden kann. Kapitel 15 ist eine Weiterführung des Kapitels 11 des ersten Bandes. Es folgt dem Konzept der Gelfandschen Theorie der normierten Algebren. Zentral ist hier die Frage der Darstellung von Algebren mit Involutionen als Operatoralgebren von Hilberträumen.

Wie im ersten Band sind die einzelnen Abschnitte von Aufgabenserien begleitet, die sehr oft auch Ausblicke in nicht behandelte Gegenstände gewähren. Dieser zweite Band schliesst sich in seiner Tragweite würdig an den ersten an.

J. Rätz