

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 32 (1977)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Übergangsflächen bei Regelschraubflächen  
**Autor:** Hartmann, E.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32149>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

deckung der ganzen Ebene durch gleiche Kreise. Das regelmässige Gitter wird aber durch den Quadratrund gestört. Diese Randstörung kann offenbar stark von  $n$  abhängig sein.

A. Zbinden, Bern

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aufgabe 692, Problem 692A, *El. Math.* 29, 49–51 (1974).  
 [2] M. GOLDBERG, *Covering a Square by Equal Circles*, unveröffentlicht.

## Übergangsflächen bei Regelschraubflächen

### 1. Problemstellungen

Während früher Wendelflächen in der Bautechnik nur selten angewandt wurden und wohl hauptsächlich als Unterseiten bei Wendeltreppen zu beobachten waren, treten sie in letzter Zeit recht häufig in Erscheinung als Auffahrten in Parkhäusern und -decks, als Verbindungen kreuzungsfreier Strassen und als Brückenauffahrten. In diesem Zusammenhang stellt sich das Problem, gewisse Regelschraubflächen, zumeist Wendelflächen, knicklos mit Ebenen zu verbinden; ebenso sind gelegentlich Regelschraubflächen verschiedener Ganghöhen knicklos ineinander überzuleiten. Diese Probleme werden in der Praxis wohl empirisch gelöst, doch lassen sich in der Tat einfach erzeugbare Übergangsflächen angeben.

### 2. Vorbetrachtungen

Haben zwei windschiefe Regelflächen eine Erzeugende gemeinsam, so berühren sie einander bekanntlich nicht längs dieser Erzeugenden, sondern im allgemeinen nur in zwei Punkten auf ihr. Sollen sie einander in jedem Punkt der gemeinsamen Erzeugenden berühren, so sind die beiden folgenden Bedingungen zu erfüllen:

1. Der Drall beider Regelflächen muss längs der gemeinsamen Erzeugenden übereinstimmen.
2. Die beiden Erzeugenden müssen so miteinander zur Deckung gebracht werden, dass die Striktionspunkte zusammenfallen.

### 3. Übergangsflächen zwischen einer Wendelfläche und einer zu ihrer Schraubachse senkrechten Ebene sowie Erweiterungen dieses Problems

In einem orthogonalen  $xyz$ -Koordinatensystem sei eine Wendelfläche gegeben, als Schraubachse werde die  $z$ -Achse gewählt. Eine mögliche Parameterdarstellung ist die folgende:

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ pv \end{pmatrix} .$$

$p$  bedeutet dabei wie üblich den Schraubparameter, der gemäss  $p = h/2\pi$  mit der Ganghöhe  $h$  der Wendelfläche zusammenhängt. Längs der Erzeugenden  $v=0$ , also der  $x$ -Achse, soll eine Übergangsfläche knicklos an die Wendelfläche angeschlossen werden; diese Übergangsfläche soll ihrerseits wiederum ebenfalls knicklos in eine zur Schraubachse senkrechte Ebene überleiten.

Die Wendelfläche ist ein besonderes Konoid mit dem konstanten Drall  $d=p$ , und die Schraubachse ist die Striktionslinie. Es liegt also der Gedanke nahe, als Übergangsflächen ebenfalls Konoide zu verwenden, deren Drall beim Anschluss an die Wendelfläche gemäss Bedingung 1 den Wert  $p$  annehmen muss, beim Übergang in die Ebene aber verschwindet. Weiterhin müssen nach Bedingung 2 die Striktionspunkte der gemeinsamen Erzeugenden von Wendelfläche und Konoid zusammenfallen, in diesem Falle also auf die  $z$ -Achse. Solche Konoide sind die folgenden:

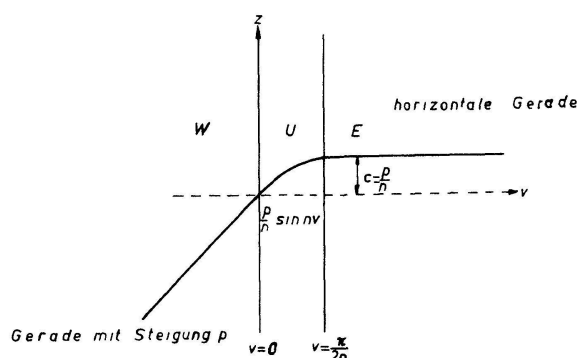
$$\vec{y}(u, v) = \begin{cases} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ p/n \cdot \sin nv \end{cases} \text{ mit } n \neq 0 \text{ und reell.}$$

Darunter befindet sich für  $n=2$  das bekannte Plückersche Konoid, bei dem allerdings die «Umschwungsamplitude»  $p/2$  statt wie üblich 1 beträgt. Der Übergang vom Konoid zur Ebene mit der Gleichung  $z=c$  kann in der Erzeugenden  $v=\pi/2n$  erfolgen; diese Erzeugende heisst wegen ihres verschwindenden Dralles auch «Torsalerzeugende». Durch geeignete Wahl von  $n$  lässt sich auch die Anpassung an die vorgegebene Höhe  $c$  der Ebene über der  $xy$ -Ebene erreichen. Aus dem Gleichungssystem

$$z = c = p/n \cdot \sin nv, \quad d = p \cdot \cos nv = 0$$

erhält man  $v = \pi/2n = \pi c/2p$  und  $n = p/c$  (weitere Winkel  $v$  kommen aus praktischen Erwägungen nicht in Betracht, da der Übergang zwischen Wendelfläche und Ebene wohl so rasch wie möglich vollzogen werden soll).

Einer Anregung folgend seien die Verhältnisse verdeutlicht durch Schnitt der Wendelfläche, Übergangsfläche und Ebene mit dem coaxialen Einheitszylinder; dieser wird mit den entstehenden Schnittkurven in die Ebene abgewickelt (Figur 1). Der knicklose Übergang der Flächen ineinander zeigt sich als knickloser Anschluss ihrer Schnittkurven mit dem Drehzylinder.



Figur 1. Abwicklung des coaxialen Einheitszylinders ( $p = 3/\pi$ ,  $n = 1$ ,  $v = \pi/2$ ,  $c = p$ ).

Problemstellung und Lösung lassen sich ausdehnen auf die anderen Regelschraubflächen:

a) Gerade, offene Regelschraubfläche

Eine mögliche Parameterdarstellung dieser Fläche ist

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin v + u \cdot \cos v \\ a \cdot \cos v + u \cdot \sin v \\ pv \end{pmatrix}.$$

$a$  bedeutet den kürzesten Abstand der Erzeugenden von der Schraubachse, die hier ständig mit der  $z$ -Achse zusammenfallen soll. Als Übergangsfläche erhält man die folgende konoidale Regelfläche:

$$\vec{y}(u, v) = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin v + u \cdot \cos v \\ a \cdot \cos v + u \cdot \sin v \\ p/n \cdot \sin nv \end{pmatrix}.$$

Die Erzeugenden dieser Fläche sind parallel zur  $xy$ -Ebene und berühren den Drehzylinder mit Radius  $a$  und der  $z$ -Achse als Drehachse.

b) Schiefe, geschlossene Regelschraubfläche

Für diese Schraubfläche kann man folgende Parameterdarstellung verwenden:

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ u \cdot \tan \beta + pv \end{pmatrix}.$$

$\beta$  bedeutet den Winkel der Erzeugenden gegen die  $xy$ -Ebene. Die Übergangsfläche lässt sich folgendermassen darstellen:

$$\vec{y}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ u \cdot \tan \beta + p/n \cdot \sin nv \end{pmatrix}.$$

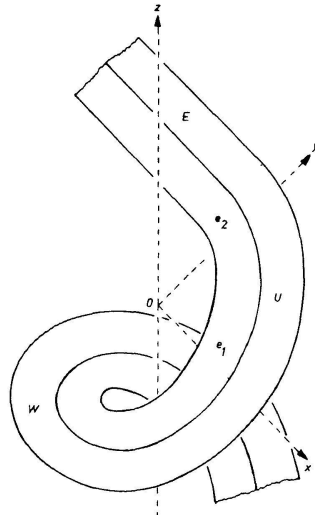
Die Erzeugenden dieser Regelfläche bilden mit der  $xy$ -Ebene den konstanten Winkel  $\beta$  – es handelt sich somit nicht um ein schiefes Konoid! Der Anschluss dieser Fläche an eine Ebene kann selbstverständlich nur erfolgen, wenn diese Ebene mit der  $xy$ -Ebene den Winkel  $\beta$  bildet.

c) Schiefe, offene Regelschraubfläche

Sie kann folgendermassen dargestellt werden:

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin v + u \cdot \cos v \\ a \cdot \cos v + u \cdot \sin v \\ u \cdot \tan \beta + pv \end{pmatrix}.$$

Die geometrische Bedeutung der Grössen  $a$  und  $\beta$  ist dieselbe wie oben. Als Übergangsfläche kann man verwenden:



Figur 2. Übergangsfläche  $\dot{U}$  zwischen einer Wendelfläche  $W$  und einer Ebene  $E$  (Übergang zwischen  $W$  und  $\dot{U}$  längs der Erzeugenden  $e_1$ , zwischen  $\dot{U}$  und  $E$  längs  $e_2$ ;  $p=3/\pi$ ,  $n=1$ ,  $v=\pi/2$ ,  $c=p$ ).

$$\vec{y}(u, v) = \begin{pmatrix} -a \cdot \sin v + u \cdot \cos v \\ a \cdot \cos v + u \cdot \sin v \\ u \cdot \tan \beta + p/n \cdot \sin nv \end{pmatrix}.$$

Die Erzeugenden dieser Fläche bilden mit der  $xy$ -Ebene den konstanten Winkel  $\beta$  und berühren den gleichen Drehzylinder wie unter a). Auch hier muss eine allfällige Anschlussebene unter dem Winkel  $\beta$  gegen die  $xy$ -Ebene geneigt sein. Zur Auffindung derjenigen Erzeugenden, längs der die Ebene an die Übergangsfläche angeschlossen werden soll, muss die Torsalerzeugende bestimmt werden; das führt auf die Beziehung  $p \cdot \cos nv + a \cdot \tan \beta = 0$ , aus der  $v$  bestimmt werden kann. Die Torsalerzeugende existiert natürlich nur bei Übergangsflächen mit  $|a \cdot \tan \beta / p| \leq 1$ . Für die Fälle b) und c) könnte praktischer Bedarf bestehen, wenn die Fahrbahn eine Seitenneigung erhalten soll.

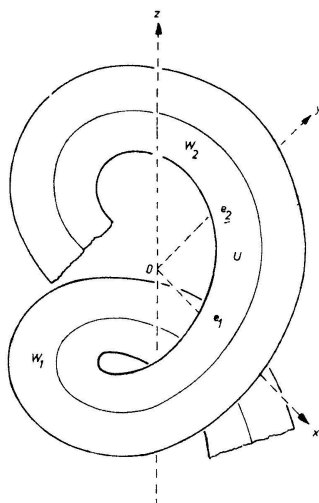
#### 4. Übergangsfläche zwischen zwei Wendelflächen mit verschiedenen Ganghöhen und gemeinsamer Schraubachse

Die erste Wendelfläche habe die Parameterdarstellung

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ p_1 v \end{pmatrix}.$$

Der Schraubparameter der zweiten Wendelfläche sei  $p_2$  und es gelte  $p_1 > p_2$ . Als Übergangsfläche zwischen beiden Wendelflächen werde das folgende Konoid gewählt:

$$\vec{y}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ p_1/n \cdot \sin nv \end{pmatrix}.$$



Figur 3. Übergangsfläche  $U$  zwischen einer Wendelfläche  $W_1$  und einer Wendelfläche  $W_2$  (Übergang zwischen  $W_1$  und  $U$  längs der Erzeugenden  $e_1$ , zwischen  $U$  und  $W_2$  längs  $e_2$ ;  $p_1 = 3/\pi = 2p_2$ ,  $n = 1$ ,  $v = \pi/3$ ).

Der Anschluss an die erste Wendelfläche kann stattfinden in der Erzeugenden  $v = 0$ ; als Übergangsbedingung für die zweite Wendelfläche erhält man die folgende Beziehung:  $p_2 = p_1 \cdot \cos nv$ .

Durch geeignete Wahl von  $n$  kann noch die Höhe beeinflusst werden, in der der zweite Übergang stattfinden soll; danach erst kann die genaue Lage der zweiten Wendelfläche festgelegt werden. Die Abwicklung des coaxialen Einheitszylinders gemäss Figur 1 würde hier zwei geneigte Geraden mit den Anstiegen  $p_1$  bzw.  $p_2$  zeigen, die durch eine Sinuslinie knicklos miteinander verbunden sind.

E. Hartmann, ZUOZ

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. FLADT und A. BAUR, *Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven* (Braunschweig 1975).
- [2] J. HOSCHEK, *Liniengeometrie* (Zürich 1971).
- [3] K. STRUBECKER, *Differentialgeometrie I, II, III* (Berlin, ab 1958).

## $p$ -adische Kettenbrüche und Irrationalität $p$ -adischer Zahlen

In der vorliegenden Note wird zunächst der Körper der  $p$ -adischen Zahlen und ein von Th. Schneider angegebener Kettenbruchalgorithmus für solche Zahlen beschrieben. Als Hauptergebnis wird sodann ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Irrationalität  $p$ -adischer Zahlen bewiesen.

**1.  $p$ -adische Zahlen.** Sei  $p$  eine feste Primzahl. Für  $m \in \mathbf{Z}$ ,  $m \neq 0$  werde  $\text{ord}(m; p) := \text{Max}\{j \in \mathbf{Z} \mid p^j \text{ teilt } m\}$  gesetzt. Ist  $a \in \mathbf{Q}$ ,  $a \neq 0$  und  $a = s/t$  mit  $s, t \in \mathbf{Z}$  und beide  $\neq 0$ ,