**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 32 (1977)

Heft: 2

Artikel: Überdeckung eines Quadrates durch 6 kongruente Kreise

Autor: Zbinden, A.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-32148

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 30.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

## ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

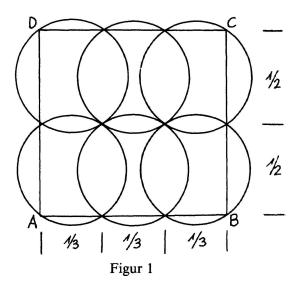
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

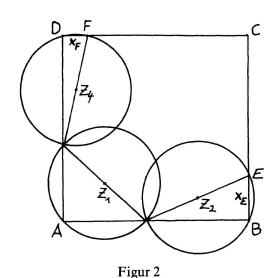
El. Math. Band 32 Heft 2 Seiten 25-48 10. März 1977

# Überdeckung eines Quadrates durch 6 kongruente Kreise

Ein Einheitsquadrat ABCD soll durch 6 kongruente Kreise  $K_1, \ldots, K_6$  überdeckt werden. Im folgenden bestimmen wir den kleinstmöglichen Wert  $r_0$  für die Kreisradien, indem wir schrittweise eine derart minimale Überdeckung konstruieren.

Das Beispiel in Figur 1 zeigt, dass  $r_0 \le \sqrt{13}/12$  ist. Die Eckpunkte A, B, C und D werden also durch 4 verschiedene Kreise  $K_1, K_2, K_3$  und  $K_4$  überdeckt. Diese Kreise bezeichnen wir als Eckkreise.





Satz 1. Die 4 Eckkreise einer minimalen Überdeckung decken 2 gegenüberliegende Quadratseiten vollständig, die andern 2 Seiten nur teilweise.

Beweis. Wegen  $r_0 \le \sqrt{13}/12 < 5/16$  können 4 Kreise nicht 3 Seiten überdecken.

Würden die Eckkreise weniger als 2 Seiten decken, so müsste  $K_5$  oder  $K_6$  zwei (natürlich benachbarte) Seiten teilweise überdecken. Mit einem gleichgrossen Kreis könnte aber zu diesen Randstücken zusätzlich die dazwischenliegende Ecke über-

deckt werden. Es würde uns gelingen, mit 4 Kreisen vom Radius  $r_0$  3 Seiten zu decken, was wir eben als unmöglich erkannt haben.

Es bleibt zu zeigen, dass die überdeckten Seiten nicht benachbart sind. Dazu versuchen wir die Gegenannahme, dass die Seiten AB und AD vollständig durch die Eckkreise überdeckt seien. Nach dem vorigen Abschnitt können wir weiter annehmen, dass  $K_5 BC$  teilweise decke und  $K_6 CD$ .

Offensichtlich ist  $K_1 \cap K_3 = \emptyset$  und  $K_2 \cap K_4 = \emptyset$ . Weiter gilt jetzt  $K_4 \cap K_5 = \emptyset$  und  $K_2 \cap K_6 = \emptyset$ , denn (Fig. 2) es ist  $x_E < 1/4$  und deshalb  $ED > \sqrt{13}/3 \geqslant 4r_0$ ; entsprechend ist auch  $FB > 4r_0$ . Damit die Quadratüberdeckung doch vollständig ist, müssen sich nun  $K_5$  und  $K_6$  in  $K_1$  schneiden. Dies ist aber nicht möglich, denn wegen  $x_E < 1/4$  liegt  $K_1 \cap K_5$  ganz unterhalb der Diagonale AC und wegen  $x_F < 1/4$  liegt  $K_1 \cap K_6$  ganz oberhalb dieser Diagonale. Die Gegenannahme ist nicht haltbar.

qed

Satz 2. Es existiert eine minimale Überdeckung mit den Eigenschaften:

- a) Die Ecken liegen auf den Peripherien der Eckkreise.
- b) Die Schnittpunkte der Kreise liegen alle auf dem Quadrat.

Beweis. Wir zeigen, dass eine beliebige minimale Überdeckung durch Verschieben der Kreise in eine Überdeckung im Sinne von Satz 2 verwandelt werden kann.

Nach Satz 1 können wir annehmen, dass AD und BC durch die Eckkreise gedeckt werden, während  $K_5$  die Seite AB und  $K_6$  die Seite CD teilweise überdecken.

Zum Beweis brauchen wir den folgenden elementaren

Hilfssatz. Der Scheitel S eines rechten Winkels liege im Kreis K mit Radius r.  $T_1$  und  $T_2$  seien die Schnittpunkte der beiden Schenkel mit K.

Das Gebiet von K, das zwischen den beiden Schenkeln liegt, kann durch einen Kreis K' mit Radius r, der durch S und  $T_1$  geht, vollständig überdeckt werden. Mit dem Hilfssatz können wir das folgende schrittweise Verfahren begründen:

Schritt 1. Die 4 Eckkreise werden so verschoben, dass die Quadratecken auf die Peripherien gelangen, wobei je ein Schnittpunkt mit einer Seite festgehalten wird. Gemäss Hilfssatz ist das Quadrat immer noch vollständig überdeckt. In den folgenden Schritten verschieben wir die Eckkreise nur noch derart, dass die Eigenschaft a) erhalten bleibt.

Schritt 2. Wir korrigieren nun die Schnittpunkte derjenigen Eckkreise, die die Seitenmitte  $M_4$  von AD bzw.  $M_2$  von BC nicht bedecken, mit den Kreisen  $K_5$  und  $K_6$ . Wir wollen etwa annehmen, dass  $M_4$  nicht in  $K_1$  liege und dass ein Schnittpunkt von  $K_1$  mit  $K_5$  ausserhalb des Quadrates liege. Vom zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise aus fällen wir das Lot auf AB. Liegt der Fusspunkt T des Lotes in  $K_1 \cap K_5$ , so verschieben wir beide Kreise so, dass sie sich in T schneiden, wobei ein Schnittpunkt von  $K_5$  mit AB (derjenige näher bei B) fixiert bleibt. Liegt T dagegen nur in einem der Kreise, so verschieben wir nur diesen Kreis, bis der Schnittpunkt mit dem andern Kreis auf AB liegt. Den Fixpunkt wählen wir gleich wie im 1. Fall. In beiden Fällen bleibt die Überdeckung gemäss Hilfssatz vollständig.

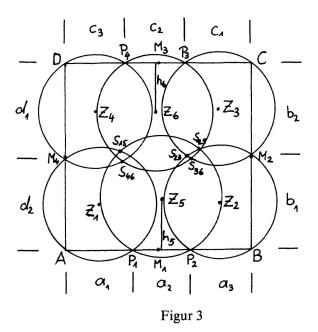
Schritt 3. Als nächstes korrigieren wir die Schnittpunkte von  $K_1$  mit  $K_4$  und  $K_2$  mit  $K_3$ . Falls  $M_2$  bzw.  $M_4$  im Schnitt zweier Eckkreise liegt, so verschieben wir die

beiden Kreise, bis sie sich in dieser Seitenmitte treffen. Andernfalls verschieben wir nur denjenigen Kreis, der die Seitenmitte bedeckt, bis sich die Kreise auf dem Quadratrand schneiden. Wie leicht zu zeigen ist, schneiden sich die beiden Kreispaare im Quadratinnern je auf der Mittellinie  $M_2M_4$ ; deshalb kann auch hier wieder der Hilfssatz zitiert werden.

Schritt 4. Zuletzt korrigieren wir noch die Schnittpunkte derjenigen Eckkreise, die  $M_2$  bzw.  $M_4$  bedecken, mit den Kreisen  $K_5$  und  $K_6$ . Nehmen wir diesmal an,  $K_1$  überdecke  $M_4$ . Das im Schnittpunkt  $P_1$  von  $K_1$  mit AB auf der Seite AB errichtete Lot liegt im Quadratinnern ganz in  $K_1 \cap K_4$  (die beiden Kreise schneiden sich auf  $M_2M_4$ ). Wir können deshalb einfach  $K_5$  verschieben, bis  $P_1$  auf dessen Peripherie liegt, wobei wir den Fixpunkt wie in Schritt 2 wählen.

Mit diesen 4 Schritten sind wir zu einer minimalen Überdeckung gelangt, die a) und b) erfüllt. qed

Von jetzt an betrachten wir ohne ausdrücklichen Vermerk nur noch Überdeckungen, die die beiden Eigenschaften aus Satz 2 besitzen. Dabei werden wir stets die Bezeichnungen aus Figur 3 verwenden. Vorgreifend auf später folgende Beispiele werden wir schon die verbesserte Abschätzung  $r < \sqrt{13}/12$  verwenden.



Mit der neuen Abschätzung folgt, dass  $a_1 < 1/3$  oder  $c_3 < 1/3$  und also  $K_5 \cap K_3 = \emptyset$  oder  $K_6 \cap K_2 = \emptyset$  ist. (Es kann natürlich nur eines der Paare disjunkt sein.) Ebenso ist entweder  $K_5 \cap K_4 = \emptyset$  oder  $K_6 \cap K_1 = \emptyset$ . Wir können  $K_6 \cap K_2 = \emptyset$  voraussetzen und die beiden Fälle  $K_6 \cap K_1 = \emptyset$  und  $K_5 \cap K_4 = \emptyset$  einzeln untersuchen.

## **1. Fall.** $K_6 \cap K_2 = \emptyset$ und $K_6 \cap K_1 = \emptyset$ .

Das Quadrat kann nur vollständig überdeckt sein, wenn der Rand überdeckt ist und ausserdem  $S_{36} \in K_5$  und  $S_{46} \in K_5$  gilt. Diese Forderungen genügen auch

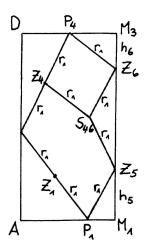
schon, denn es folgt  $S_{15} \in K_4$  und  $S_{25} \in K_3$ . Wir suchen nun den kleinstmöglichen Radius  $r_1$  für eine Überdeckung mit den obigen Nebenbedingungen.

Satz 3. Es existiert eine Überdeckung mit Kreisradien  $r_1$  und den folgenden beiden Eigenschaften:

- a) Die Überdeckung ist symmetrisch bezüglich der Mittellinie  $M_1 M_3$ .
- b)  $S_{36}$  und  $S_{46}$  liegen auf der Peripherie von  $K_5$ .

Beweis.  $\Lambda_1$  sei eine beliebige unter Fall 1 minimale Überdeckung. Ausgehend von  $\Lambda_1$  konstruieren wir eine Überdeckung  $\Lambda_2$  wie folgt (die hochgestellten Indizes geben die Überdeckung an):

 $Z_6^2$  wählen wir auf  $M_1M_3$  mit  $h_6^2 = h_6^1$ . Die übrigen Kreise wählen wir so, dass die Bedingungen aus Satz 2 wiederum erfüllt sind.  $Z_5^2$  liegt natürlich auf  $M_1M_3$  und es ist  $h_5^2 \geqslant h_5^1$ . Wir müssen noch zeigen, dass  $S_{36}^2$  und  $S_{46}^2$  in  $K_5^2$  liegen. Dazu führen wir in beiden Überdeckungen den Hilfspunkt  $P^1$  bzw.  $P^2$  ein, der  $S_{36}Z_6S_{46}$  zu einem Rombus ergänzt.  $P^1$  und  $P^2$  liegen beide auf  $M_1M_3$  und für die Distanz  $P^2$  von  $P^2$  gilt  $P^2 \leqslant P^2$ . Wegen  $P^2 \leqslant P^2$  und  $P^2 \leqslant P^2$  ist ferner  $P^2 \leqslant P^2$ . Es folgt jetzt  $P^2 \leqslant P^2$ , und da  $P^2 \leqslant P^2$  ebenfalls auf  $P^2 \leqslant P^2$  und  $P^2 \leqslant P^2$  besitzt aber auch die Eigenschaft by, denn wären die Strecken  $P^2 \leqslant P^2$  und  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner als  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner als  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner auch die Eigenschaft by, denn wären die Strecken  $P^2 \leqslant P^2$  und  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner als  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner als  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner auch die Eigenschaft by, denn wären die Strecken  $P^2 \leqslant P^2$  und  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner als  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner als  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner auch die Eigenschaft by, denn wären die Strecken  $P^2 \leqslant P^2$  und  $P^2 \leqslant P^2$  kleiner als  $P^2 \leqslant P$ 



Figur 4

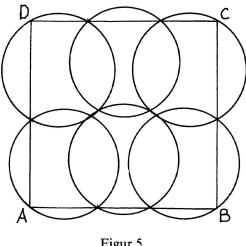
Was nach Satz 3 übrig bleibt, ist eine Schar von Überdeckungen, die durch das in Figur 4 dargestellte Gerüst charakterisiert werden. Der Radius r einer solchen Überdeckung ist nur noch von  $d_1$  abhängig. Die numerische Bestimmung des Minimums  $r_1$  von  $r(d_1)$  ist unproblematisch, da die Funktion äusserst flach verläuft. Die Berechnung ergibt

 $r_1 = 0.29895$  für  $d_1 = 0.5214$ .

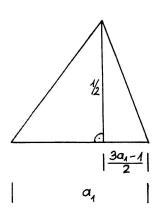
Die für Fall 1 minimale Überdeckung ist in Figur 5 dargestellt.

**2. Fall.** 
$$K_6 \cap K_2 = \emptyset$$
 und  $K_5 \cap K_4 = \emptyset$ .

In diesem zweiten Fall muss  $S_{36} \in K_5$  und  $S_{15} \in K_6$  sein. Es folgt dann weiter  $S_{46} \in K_1$  und  $S_{25} \in K_3$ . Wir suchen wieder den kleinstmöglichen Radius  $r_2$  für eine Überdeckung der betrachteten Klasse.



Figur 5



Figur 6

Satz 4. Es existiert eine Überdeckung mit Kreisradien  $r_2$  und den folgenden beiden Eigenschaften:

- Die Überdeckung ist symmetrisch bezüglich des Quadratmittelpunktes mit einem Symmetriewinkel von 180°.
- $S_{36}$  liegt auf der Peripherie von  $K_5$  und  $S_{15}$  liegt auf der Peripherie von  $K_6$ . b)

Beweis. Wir beweisen zuerst den folgenden Hilfssatz. Für die unter Fall 2 betrachteten Überdeckungen gilt:

$$a_1 \geqslant c_1 \triangleright a_1 \geqslant a_2$$
  
und  $a_1 = a_2 \triangleright a_1 = c_1$ .

Beweis des Hilfssatzes:

Sei  $a_1 \ge c_1$  und  $a_1 \le a_2$ . Dann ist  $a_3 \ge c_3$  und  $a_3 \le 1 - 2a_1$ . Für den Kreisradius r der Überdeckung erhalten wir wegen  $c_3 = \sqrt{a_1^2 - 1 + 2\sqrt{4r^2 - a_1^2}}$  die Abschätzung

$$r^2 \le (9/16) a_1^4 - (3/2) a_1^3 + 2 a_1^2 - a_1 + (1/4)$$
.

Gleichheit kann höchstens im Falle  $a_1 = c_1$  gelten.

Eine weitere Ungleichung für r erhalten wir, indem wir den Radius von  $K_5$ durch den Umkreisradius  $\rho$  des Dreiecks  $P_1P_2S_{23}$  nach unten abschätzen. Die Grundseite  $P_1P_2$  des Dreiecks ist mindestens  $a_1$ , die Höhe beträgt gerade 1/2.

Wegen  $c_1 \le a_1$  und  $a_3 \le 1 - 2a_1$  ist ferner  $S_{23}M_2 \le (3a_1 - 1)/2$ .  $\rho$  ist somit nicht kleiner als der Umkreisradius des in Figur 6 dargestellten Dreiecks. Dies ergibt

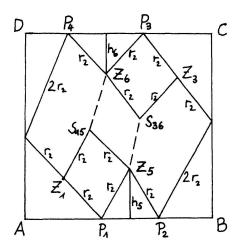
$$r^2 \ge \rho^2 \ge (9/16) a_1^4 - (3/2) a_1^3 + 2 a_1^2 - a_1 + (1/4)$$
.

Mit den beiden Ungleichungen für r ergeben sich die Behauptungen des Hilfssatzes.

Wir wollen nun ausgehen von einer für Fall 2 minimalen Überdeckung  $\Lambda_1$  mit  $a_1 \ge c_1$ . Nun konstruieren wir eine neue Überdeckung  $\Lambda_2$  mit gleichen Kreisradien  $r_2$  wie folgt:

$$K_2^2 = K_2^1$$
,  $K_3^2 = K_3^1$ , ferner  $a_1 = \max\{c_1, (1 - a_3)/2\}$ ;

die restlichen Kreise wählen wir so, dass Satz 2 gilt. Wir müssen natürlich noch zeigen, dass  $\Lambda_2$  das Quadrat vollständig überdeckt. Die Kreise von  $\Lambda_2$  wurden so gewählt, dass der Quadratrand vollständig bedeckt ist. Da wegen  $a_1 \geqslant c_1$   $S_{15}^2 Z_6^2 \geqslant S_{36}^2 Z_5$  ist, bleibt nur noch  $S_{15}^2 \in K_6^2$  nachzuweisen. Zur Illustration des Beweises dient Figur 7, wo das Gerüst der betrachteten Überdeckungen dargestellt ist.



Figur 7

 $S_{15}^1$  und  $S_{15}^2$  liegen auf derselben Parallelen zu AD, und da die Differenz  $a_1-a_2$  in  $A_2$  kleiner ist als in  $A_1$  (Hilfssatz), liegt  $S_{15}^1$  näher bei AB als  $S_{15}^2$ . Es ist also  $S_{15}^2Z_6^2 \leqslant S_{15}^1Z_6^2$ . Statt  $S_{15}^2 \in K_6^2$  wollen wir nun  $S_{15}^1 \in K_6^2$  beweisen.

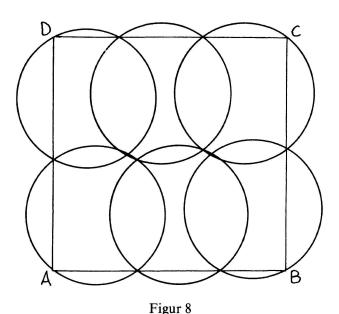
Sowohl in  $\Lambda_1$  als auch in  $\Lambda_2$  ist  $a_1+c_3<2/3$  und  $c_1+a_3<2/3$ . Es folgt  $a_2+c_2>2/3$  und weiter  $h_5+h_6<1/2$ . Wegen  $h_6< h_5$  ist auch  $h_6<1/4$ . Ferner gilt wegen  $a_1>1/3$   $d_2<1/2$ . Für den Abstand  $t_1$  von  $S_{15}$  zu AB erhalten wir die Ungleichung  $t_1< h_5+(1/4)$ . Für den Abstand  $t_3$  von  $S_{15}$  zu CD ergibt sich  $t_3>h_6+(1/4)>2h_6$ . Mit  $Z_6^*$  bezeichnen wir nun den zu  $Z_6^1$  bezüglich der Achse  $S_{15}^1P_3$  symmetrischen Punkt. Die Punkte  $Z_6^1$ ,  $Z_6^2$  und  $Z_6^*$  liegen alle auf einem Kreis vom Radius  $r_2$  um  $P_3$ . Aus  $t_3>h_6+(1/4)$  und  $S_{15}^1Z_6^1< r_2$  folgt, dass der Abstand von  $Z_6^*$  zu CD grösser ist als 1/4. Da aber auch in  $A_2$   $h_6<1/4$  gilt, muss  $Z_6^2$  zwischen  $Z_6^1$  und  $Z_6^*$  liegen, womit  $S_{15}^1Z_6^2 \leqslant r_2$  folgt.

Gemäss Konstruktion ist in  $\Lambda_2$   $a_1 = c_1$  oder  $a_1 = a_2$ . Im zweiten Fall folgt aber mit dem Hilfssatz wiederum  $a_1 = c_1$  und folglich besitzt  $\Lambda_2$  die Eigenschaft a). Die symmetrische Überdeckung  $\Lambda_2$  muss aber auch die Eigenschaft b) besitzen, denn sonst wäre sie nicht minimal. Da aber  $\Lambda_1$  minimal ist, muss auch  $\Lambda_2$  minimal sein.

qed

Wegen Satz 4 können wir nun auch Fall 2 auf einfache Weise numerisch durchrechnen, denn wiederum ist r nur noch abhängig von  $d_1$ . Die Berechnung ergibt:

$$r_2 = 0.29873$$
 für  $d_1 = 0.5264$ .



In Figur 8 ist diese minimale Überdeckung gezeichnet.

Der minimale Kreisradius einer Überdeckung des Einheitsquadrates durch 6 gleiche Kreise beträgt

$$r_0 = 0.29873$$
.

#### **Ausblick**

Vom Problem, das Einheitsquadrat durch n kongruente Kreise mit minimalem Radius zu überdecken, wurden in [1] die Fälle  $n \le 5$  gelöst. In [2] wird der Fall n = 7 gelöst. Immer wurde dabei die minimale Überdeckung von der Überdeckung des Quadratrandes her bestimmt. In dem hier vorgeführten Lösungsweg für n = 6 wird auch zuerst die Randüberdeckung gesucht, aber die gewonnene Information reicht zur Bestimmung der minimalen Überdeckung nicht aus.

Das Gesamtproblem muss wohl über Näherungen angegangen werden. Für grosse Werte von n bietet sich als erste Näherung die Überdeckung an, bei der die Kreiszentren ein regelmässiges Dreiecksgitter bilden, wie bei der optimalen Über-

deckung der ganzen Ebene durch gleiche Kreise. Das regelmässige Gitter wird aber durch den Quadratrand gestört. Diese Randstörung kann offenbar stark von n abhängig sein.

A. Zbinden, Bern

#### **LITERATURVERZEICHNIS**

- [1] Aufgabe 692, Problem 692A, El. Math. 29, 49–51 (1974).
- [2] M. GOLDBERG, Covering a Square by Equal Circles, unveröffentlicht.

# Übergangsflächen bei Regelschraubflächen

## 1. Problemstellungen

Während früher Wendelflächen in der Bautechnik nur selten angewandt wurden und wohl hauptsächlich als Unterseiten bei Wendeltreppen zu beobachten waren, treten sie in letzter Zeit recht häufig in Erscheinung als Auffahrten in Parkhäusern und -decks, als Verbindungen kreuzungsfreier Strassen und als Brückenauffahrten. In diesem Zusammenhang stellt sich das Problem, gewisse Regelschraubflächen, zumeist Wendelflächen, knicklos mit Ebenen zu verbinden; ebenso sind gelegentlich Regelschraubflächen verschiedener Ganghöhen knicklos ineinander überzuleiten. Diese Probleme werden in der Praxis wohl empirisch gelöst, doch lassen sich in der Tat einfach erzeugbare Übergangsflächen angeben.

### 2. Vorbetrachtungen

Haben zwei windschiefe Regelflächen eine Erzeugende gemeinsam, so berühren sie einander bekanntlich nicht längs dieser Erzeugenden, sondern im allgemeinen nur in zwei Punkten auf ihr. Sollen sie einander in jedem Punkt der gemeinsamen Erzeugenden berühren, so sind die beiden folgenden Bedingungen zu erfüllen:

- 1. Der Drall beider Regelflächen muss längs der gemeinsamen Erzeugenden übereinstimmen.
- 2. Die beiden Erzeugenden müssen so miteinander zur Deckung gebracht werden, dass die Striktionspunkte zusammenfallen.

# 3. Übergangsflächen zwischen einer Wendelfläche und einer zu ihrer Schraubachse senkrechten Ebene sowie Erweiterungen dieses Problems

In einem orthogonalen xyz-Koordinatensystem sei eine Wendelfläche gegeben, als Schraubachse werde die z-Achse gewählt. Eine mögliche Parameterdarstellung ist die folgende:

$$\overrightarrow{x}(u,v) = \left\{ \begin{array}{l} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ pv \end{array} \right\} .$$