Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 32 (1977)
Heft: 2

Artikel: Überdeckung eines Quadrates durch 6 kongruente Kreise
Autor: Zbinden, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-32148

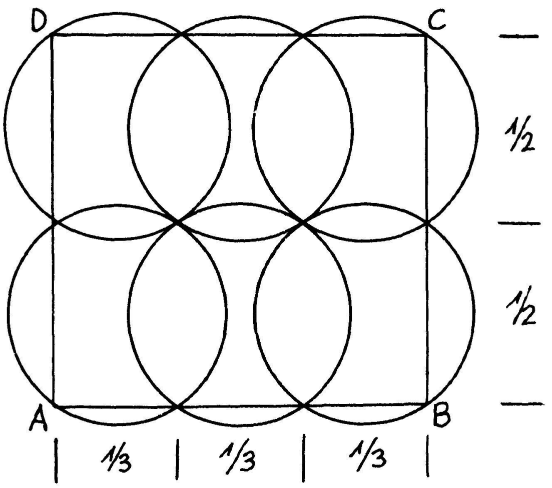
ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 32 Heft 2 Seiten 25-48 10. März 1977

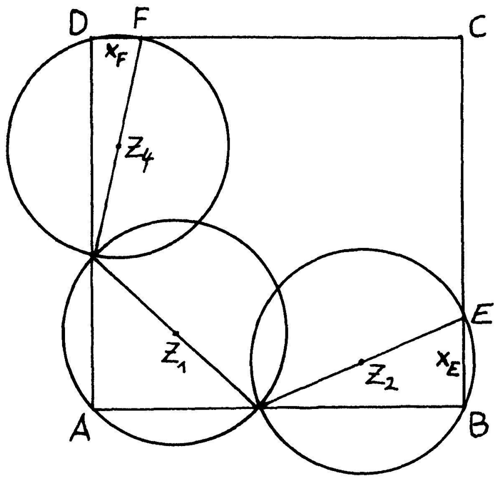
Überdeckung eines Quadrates durch 6 kongruente Kreise

Ein Einheitsquadrat $ABCD$ soll durch 6 kongruente Kreise $K_1, \ldots, K_6$ überdeckt werden. Im folgenden bestimmen wir den kleinstmöglichen Wert r_0 für die Kreisradien, indem wir schrittweise eine derart minimale Überdeckung konstruieren.

Das Beispiel in Figur 1 zeigt, dass $r_0 \leqslant \sqrt{13}/12$ ist. Die Eckpunkte A, B, C und D werden also durch 4 verschiedene Kreise K_1, K_2, K_3 und K_4 überdeckt. Diese Kreise bezeichnen wir als Eckkreise.



Figur 1



Figur 2

Satz 1. Die 4 Eckkreise einer minimalen Überdeckung decken 2 gegenüberliegende Quadratseiten vollständig, die andern 2 Seiten nur teilweise.

Beweis. Wegen $r_0 \leqslant \sqrt{13}/12 < 5/16$ können 4 Kreise nicht 3 Seiten überdecken.

Würden die Eckkreise weniger als 2 Seiten decken, so müsste K_5 oder K_6 zwei (natürlich benachbarte) Seiten teilweise überdecken. Mit einem gleichgrossen Kreis könnte aber zu diesen Randstücken zusätzlich die dazwischenliegende Ecke überdeckt werden. Es würde uns gelingen, mit 4 Kreisen vom Radius r_0 3 Seiten zu decken, was wir eben als unmöglich erkannt haben.

Es bleibt zu zeigen, dass die überdeckten Seiten nicht benachbart sind. Dazu versuchen wir die Gegenannahme, dass die Seiten AB und AD vollständig durch die Eckkreise überdeckt seien. Nach dem vorigen Abschnitt können wir weiter annehmen, dass K_5 BC teilweise decke und K_6 CD.

Offensichtlich ist $K_1 \cap K_3 = \emptyset$ und $K_2 \cap K_4 = \emptyset$. Weiter gilt jetzt $K_4 \cap K_5 = \emptyset$ und $K_2 \cap K_6 = \emptyset$, denn (Fig. 2) es ist $x_E < 1/4$ und deshalb $ED > \sqrt{13}/3 \geqslant 4 r_0$; entsprechend ist auch $FB > 4 r_0$. Damit die Quadratüberdeckung doch vollständig ist, müssen sich nun K_5 und K_6 in K_1 schneiden. Dies ist aber nicht möglich, denn wegen $x_E < 1/4$ liegt $K_1 \cap K_5$ ganz unterhalb der Diagonale AC und wegen $x_F < 1/4$ liegt $K_1 \cap K_6$ ganz oberhalb dieser Diagonale. Die Gegenannahme ist nicht haltbar.

qed

Satz 2. Es existiert eine minimale Überdeckung mit den Eigenschaften:

a) Die Ecken liegen auf den Peripherien der Eckkreise.

b) Die Schnittpunkte der Kreise liegen alle auf dem Quadrat.

Beweis. Wir zeigen, dass eine beliebige minimale Überdeckung durch Verschieben der Kreise in eine Überdeckung im Sinne von Satz 2 verwandelt werden kann.

Nach Satz 1 können wir annehmen, dass AD und BC durch die Eckkreise gedeckt werden, während K_5 die Seite AB und K_6 die Seite CD teilweise überdecken.

Zum Beweis brauchen wir den folgenden elementaren

Hilfssatz. Der Scheitel S eines rechten Winkels liege im Kreis K mit Radius r. T_1 und T_2 seien die Schnittpunkte der beiden Schenkel mit K.

Das Gebiet von K, das zwischen den beiden Schenkeln liegt, kann durch einen Kreis K' mit Radius r, der durch S und T_1 geht, vollständig überdeckt werden. Mit dem Hilfssatz können wir das folgende schrittweise Verfahren begründen:

Schritt 1. Die 4 Eckkreise werden so verschoben, dass die Quadratecken auf die Peripherien gelangen, wobei je ein Schnittpunkt mit einer Seite festgehalten wird. Gemäss Hilfssatz ist das Quadrat immer noch vollständig überdeckt. In den folgenden Schritten verschieben wir die Eckkreise nur noch derart, dass die Eigenschaft a) erhalten bleibt.

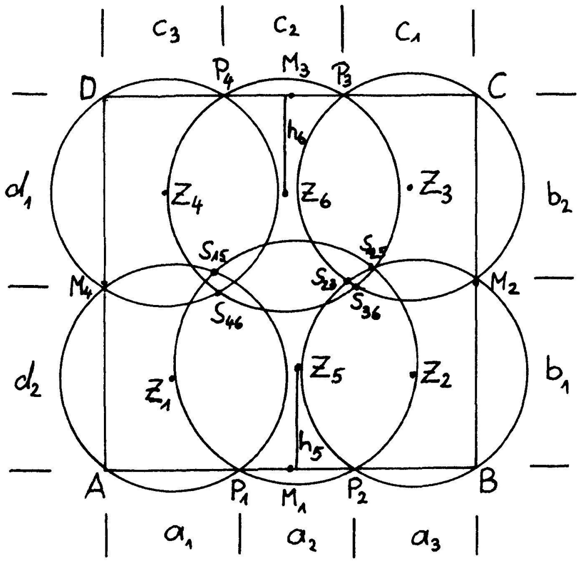
Schritt 2. Wir korrigieren nun die Schnittpunkte derjenigen Eckkreise, die die Seitenmitte M_4 von AD bzw. M_2 von BC nicht bedecken, mit den Kreisen K_5 und K_6. Wir wollen etwa annehmen, dass M_4 nicht in K_1 liege und dass ein Schnittpunkt von K_1 mit K_5 ausserhalb des Quadrates liege. Vom zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise aus fällen wir das Lot auf AB. Liegt der Fusspunkt T des Lotes in $K_1 \cap K_5$, so verschieben wir beide Kreise so, dass sie sich in T schneiden, wobei ein Schnittpunkt von K_5 mit AB (derjenige näher bei B) fixiert bleibt. Liegt T dagegen nur in einem der Kreise, so verschieben wir nur diesen Kreis, bis der Schnittpunkt mit dem andern Kreis auf AB liegt. Den Fixpunkt wählen wir gleich wie im 1. Fall. In beiden Fällen bleibt die Überdeckung gemäss Hilfssatz vollständig.

Schritt 3. Als nächstes korrigieren wir die Schnittpunkte von K_1 mit K_4 und K_2 mit K_3. Falls M_2 bzw. M_4 im Schnitt zweier Eckkreise liegt, so verschieben wir die beiden Kreise, bis sie sich in dieser Seitenmitte treffen. Andernfalls verschieben wir nur denjenigen Kreis, der die Seitenmitte bedeckt, bis sich die Kreise auf dem Quadratrand schneiden. Wie leicht zu zeigen ist, schneiden sich die beiden Kreispaare im Quadratinnern je auf der Mittellinie $M_2 M_4$; deshalb kann auch hier wieder der Hilfssatz zitiert werden.

Schritt 4. Zuletzt korrigieren wir noch die Schnittpunkte derjenigen Eckkreise, die M_2 bzw. M_4 bedecken, mit den Kreisen K_5 und K_6. Nehmen wir diesmal an, K_1 überdecke M_4. Das im Schnittpunkt P_1 von K_1 mit AB auf der Seite AB errichtete Lot liegt im Quadratinnern ganz in $K_1 \cap K_4$ (die beiden Kreise schneiden sich auf $M_2 M_4$). Wir können deshalb einfach K_5 verschieben, bis P_1 auf dessen Peripherie liegt, wobei wir den Fixpunkt wie in Schritt 2 wählen.

Mit diesen 4 Schritten sind wir zu einer minimalen Überdeckung gelangt, die a) und b) erfüllt. qed

Von jetzt an betrachten wir ohne ausdrücklichen Vermerk nur noch Überdeckungen, die die beiden Eigenschaften aus Satz 2 besitzen. Dabei werden wir stets die Bezeichnungen aus Figur 3 verwenden. Vorgreifend auf später folgende Beispiele werden wir schon die verbesserte Abschätzung $r < \sqrt{13}/12$ verwenden.



Figur 3

Mit der neuen Abschätzung folgt, dass $a_1 < 1/3$ oder $c_3 < 1/3$ und also $K_5 \cap K_3 = \emptyset$ oder $K_6 \cap K_2 = \emptyset$ ist. (Es kann natürlich nur eines der Paare disjunkt sein.) Ebenso ist entweder $K_5 \cap K_4 = \emptyset$ oder $K_6 \cap K_1 = \emptyset$. Wir können $K_6 \cap K_2 = \emptyset$ voraussetzen und die beiden Fälle $K_6 \cap K_1 = \emptyset$ und $K_5 \cap K_4 = \emptyset$ einzeln untersuchen.

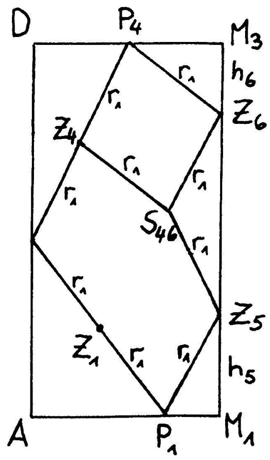
1. Fall. $K_6 \cap K_2 = \emptyset$ und $K_6 \cap K_1 = \emptyset$.

Das Quadrat kann nur vollständig überdeckt sein, wenn der Rand überdeckt ist und ausserdem $S_{36} \in K_5$ und $S_{46} \in K_5$ gilt. Diese Forderungen genügen auch schon, denn es folgt $S_{15} \in K_4$ und $S_{25} \in K_3$. Wir suchen nun den kleinstmöglichen Radius r_1 für eine Überdeckung mit den obigen Nebenbedingungen.

Satz 3. Es existiert eine Überdeckung mit Kreisradien r_1 und den folgenden beiden Eigenschaften:
a) Die Überdeckung ist symmetrisch bezüglich der Mittellinie $M_1 M_3$.
b) S_{36} und S_{46} liegen auf der Peripherie von K_5.

Beweis. Λ_1 sei eine beliebige unter Fall 1 minimale Überdeckung. Ausgehend von Λ_1 konstruieren wir eine Überdeckung Λ_2 wie folgt (die hochgestellten Indizes geben die Überdeckung an):

Z_6^2 wählen wir auf $M_1 M_3$ mit $h_6^2 = h_6^1$. Die übrigen Kreise wählen wir so, dass die Bedingungen aus Satz 2 wiederum erfüllt sind. Z_5^2 liegt natürlich auf $M_1 M_3$ und es ist $h_5^2 \geqslant h_5^1$. Wir müssen noch zeigen, dass S_{36}^2 und S_{46}^2 in K_5^2 liegen. Dazu führen wir in beiden Überdeckungen den Hilfspunkt P^1 bzw. P^2 ein, der $S_{35} Z_6 S_{46}$ zu einem Rombus ergänzt. P^1 und P^2 liegen beide auf $M_1 M_3$ und für die Distanz p von M_1 gilt $p^2 \leqslant p^1$. Wegen $S_{36}^1 Z_5^1 \leqslant r_1$ und $S_{46}^1 Z_5^1 \leqslant r_1$ ist ferner $p^1 \leqslant h_5^1$. Es folgt jetzt $p^2 \leqslant h_5^2$, und da Z_5^2 ebenfalls auf $M_1 M_3$ liegt, sind S_{36}^2 und S_{46}^2 in K_5^2. Λ_2 ist also eine symmetrische Überdeckung mit Kreisradien r_1. Λ_2 besitzt aber auch die Eigenschaft b), denn wären die Strecken $S_{36}^2 Z^2$ und $S_{46}^2 Z^2$ kleiner als r_1, so könnte auf offensichtliche Weise eine symmetrische Überdeckung mit kleineren Kreisradien konstruiert werden. qed



Figur 4

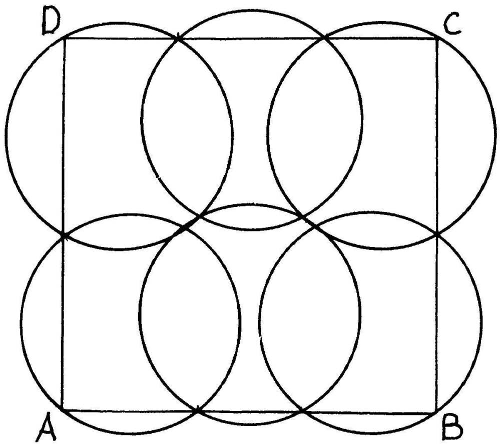
Was nach Satz 3 übrig bleibt, ist eine Schar von Überdeckungen, die durch das in Figur 4 dargestellte Gerüst charakterisiert werden. Der Radius r einer solchen Überdeckung ist nur noch von d_1 abhängig. Die numerische Bestimmung des Minimums r_1 von $r(d_1)$ ist unproblematisch, da die Funktion äusserst flach verläuft. Die Berechnung ergibt

$$r_1 = 0.29895 \text{ für } d_1 = 0.5214.$$

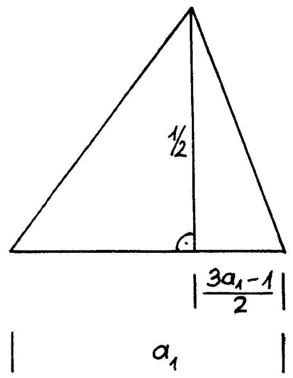
Die für Fall 1 minimale Überdeckung ist in Figur 5 dargestellt.

2. Fall. $K_6 \cap K_2 = \emptyset$ und $K_5 \cap K_4 = \emptyset$.

In diesem zweiten Fall muss $S_{36} \in K_5$ und $S_{15} \in K_6$ sein. Es folgt dann weiter $S_{46} \in K_1$ und $S_{25} \in K_3$. Wir suchen wieder den kleinstmöglichen Radius r_2 für eine Überdeckung der betrachteten Klasse.



Figur 5



Figur 6

Satz 4. Es existiert eine Überdeckung mit Kreisradien r_2 und den folgenden beiden Eigenschaften:

a) Die Überdeckung ist symmetrisch bezüglich des Quadratmittelpunktes mit einem Symmetriewinkel von 180°.

b) S_{36} liegt auf der Peripherie von K_5 und S_{15} liegt auf der Peripherie von K_6.

Beweis. Wir beweisen zuerst den folgenden
Hilfssatz. Für die unter Fall 2 betrachteten Überdeckungen gilt:

$a_1 \geqslant c_1 \triangleright a_1 \geqslant a_2$
und $a_1 = a_2 \triangleright a_1 = c_1$.

Beweis des Hilfssatzes:
Sei $a_1 \geqslant c_1$ und $a_1 \leqslant a_2$. Dann ist $a_3 \geqslant c_3$ und $a_3 \leqslant 1 - 2a_1$. Für den Kreisradius r der Überdeckung erhalten wir wegen $c_3 = \sqrt{a_1^2 - 1 + 2\sqrt{4r^2 - a_1^2}}$ die Abschätzung

$$r^2 \leqslant (9/16)\, a_1^4 - (3/2)\, a_1^3 + 2a_1^2 - a_1 + (1/4)\,.$$

Gleichheit kann höchstens im Falle $a_1 = c_1$ gelten.

Eine weitere Ungleichung für r erhalten wir, indem wir den Radius von K_5 durch den Umkreisradius ρ des Dreiecks $P_1P_2S_{23}$ nach unten abschätzen. Die Grundseite P_1P_2 des Dreiecks ist mindestens a_1, die Höhe beträgt gerade $1/2$.

Wegen $c_1 \leqslant a_1$ und $a_3 \leqslant 1-2a_1$ ist ferner $S_{23}M_2 \leqslant (3a_1-1)/2$. ρ ist somit nicht kleiner als der Umkreisradius des in Figur 6 dargestellten Dreiecks. Dies ergibt

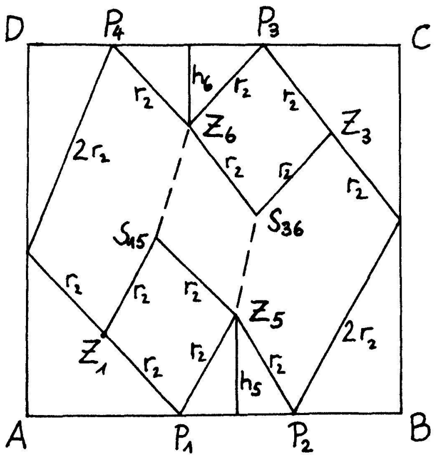
$$r^2 \geqslant \rho^2 \geqslant (9/16)\,a_1^4-(3/2)\,a_1^3+2\,a_1^2-a_1+(1/4)\,.$$

Mit den beiden Ungleichungen für r ergeben sich die Behauptungen des Hilfssatzes.

Wir wollen nun ausgehen von einer für Fall 2 minimalen Überdeckung A_1 mit $a_1 \geqslant c_1$. Nun konstruieren wir eine neue Überdeckung A_2 mit gleichen Kreisradien r_2 wie folgt:

$$K_2^2=K_2^1, \qquad K_3^2=K_3^1, \qquad \text{ferner } a_1=\max\{c_1,(1-a_3)/2\}\,;$$

die restlichen Kreise wählen wir so, dass Satz 2 gilt. Wir müssen natürlich noch zeigen, dass A_2 das Quadrat vollständig überdeckt. Die Kreise von A_2 wurden so gewählt, dass der Quadratrand vollständig bedeckt ist. Da wegen $a_1 \geqslant c_1$ $S_{15}^2Z_6^2 \geqslant S_{36}^2Z_5$ ist, bleibt nur noch $S_{15}^2 \in K_6^2$ nachzuweisen. Zur Illustration des Beweises dient Figur 7, wo das Gerüst der betrachteten Überdeckungen dargestellt ist.



Figur 7

S_{15}^1 und S_{15}^2 liegen auf derselben Parallelen zu AD, und da die Differenz a_1-a_2 in A_2 kleiner ist als in A_1 (Hilfssatz), liegt S_{15}^1 näher bei AB als S_{15}^2. Es ist also $S_{15}^2Z_6^2 \leqslant S_{15}^1Z_6^2$. Statt $S_{15}^2 \in K_6^2$ wollen wir nun $S_{15}^1 \in K_6^2$ beweisen.

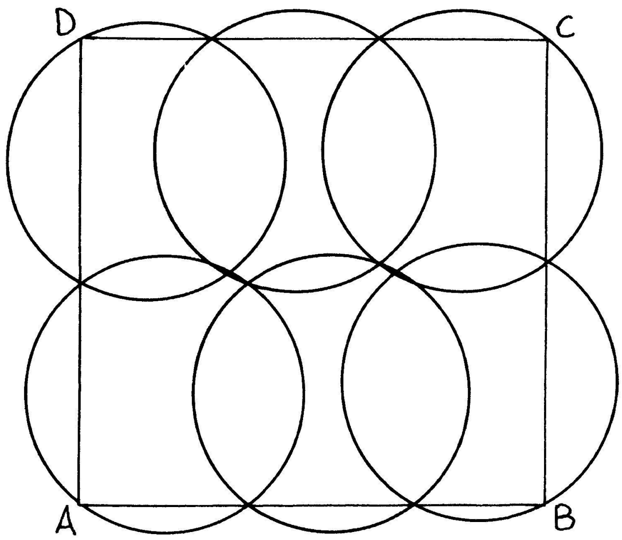
Sowohl in A_1 als auch in A_2 ist $a_1+c_3<2/3$ und $c_1+a_3<2/3$. Es folgt $a_2+c_2>2/3$ und weiter $h_5+h_6<1/2$. Wegen $h_6<h_5$ ist auch $h_6<1/4$. Ferner gilt wegen $a_1>1/3$ $d_2<1/2$. Für den Abstand t_1 von S_{15} zu AB erhalten wir die Ungleichung $t_1<h_5+(1/4)$. Für den Abstand t_3 von S_{15} zu CD ergibt sich $t_3>h_6+(1/4)>2h_6$. Mit Z_6^* bezeichnen wir nun den zu Z_6^1 bezüglich der Achse $S_{15}^1P_3$ symmetrischen Punkt. Die Punkte Z_6^1, Z_6^2 und Z_6^* liegen alle auf einem Kreis vom Radius r_2 um P_3. Aus $t_3>h_6+(1/4)$ und $S_{15}^1Z_6^1<r_2$ folgt, dass der Abstand von Z_6^* zu CD grösser ist als $1/4$. Da aber auch in A_2 $h_6<1/4$ gilt, muss Z_6^2 zwischen Z_6^1 und Z_6^* liegen, womit $S_{15}^1Z_6^2 \leqslant r_2$ folgt.

Gemäss Konstruktion ist in A_2 $a_1=c_1$ oder $a_1=a_2$. Im zweiten Fall folgt aber mit dem Hilfssatz wiederum $a_1=c_1$ und folglich besitzt A_2 die Eigenschaft a). Die symmetrische Überdeckung A_2 muss aber auch die Eigenschaft b) besitzen, denn sonst wäre sie nicht minimal. Da aber A_1 minimal ist, muss auch A_2 minimal sein.

qed

Wegen Satz 4 können wir nun auch Fall 2 auf einfache Weise numerisch durchrechnen, denn wiederum ist r nur noch abhängig von d_1. Die Berechnung ergibt:

$$r_2=0.29873 \text{ für } d_1=0.5264.$$



Figur 8

In Figur 8 ist diese minimale Überdeckung gezeichnet.

Der minimale Kreisradius einer Überdeckung des Einheitsquadrates durch 6 gleiche Kreise beträgt

$$r_0=0.29873.$$

Ausblick

Vom Problem, das Einheitsquadrat durch n kongruente Kreise mit minimalem Radius zu überdecken, wurden in [1] die Fälle $n \leqslant 5$ gelöst. In [2] wird der Fall $n=7$ gelöst. Immer wurde dabei die minimale Überdeckung von der Überdeckung des Quadratrandes her bestimmt. In dem hier vorgeführten Lösungsweg für $n=6$ wird auch zuerst die Randüberdeckung gesucht, aber die gewonnene Information reicht zur Bestimmung der minimalen Überdeckung nicht aus.

Das Gesamtproblem muss wohl über Näherungen angegangen werden. Für grosse Werte von n bietet sich als erste Näherung die Überdeckung an, bei der die Kreiszentren ein regelmässiges Dreiecksgitter bilden, wie bei der optimalen Überdeckung der ganzen Ebene durch gleiche Kreise. Das regelmässige Gitter wird aber durch den Quadratrand gestört. Diese Randstörung kann offenbar stark von n abhängig sein.

A. Zbinden, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Aufgabe 692, Problem 692A, El. Math. *29*, 49–51 (1974).
[2] M. Goldberg, *Covering a Square by Equal Circles*, unveröffentlicht.

Übergangsflächen bei Regelschraubflächen

1. Problemstellungen

Während früher Wendelflächen in der Bautechnik nur selten angewandt wurden und wohl hauptsächlich als Unterseiten bei Wendeltreppen zu beobachten waren, treten sie in letzter Zeit recht häufig in Erscheinung als Auffahrten in Parkhäusern und -decks, als Verbindungen kreuzungsfreier Strassen und als Brückenauffahrten. In diesem Zusammenhang stellt sich das Problem, gewisse Regelschraubflächen, zumeist Wendelflächen, knicklos mit Ebenen zu verbinden; ebenso sind gelegentlich Regelschraubflächen verschiedener Ganghöhen knicklos ineinander überzuleiten. Diese Probleme werden in der Praxis wohl empirisch gelöst, doch lassen sich in der Tat einfach erzeugbare Übergangsflächen angeben.

2. Vorbetrachtungen

Haben zwei windschiefe Regelflächen eine Erzeugende gemeinsam, so berühren sie einander bekanntlich nicht längs dieser Erzeugenden, sondern im allgemeinen nur in zwei Punkten auf ihr. Sollen sie einander in jedem Punkt der gemeinsamen Erzeugenden berühren, so sind die beiden folgenden Bedingungen zu erfüllen:

1. Der Drall beider Regelflächen muss längs der gemeinsamen Erzeugenden übereinstimmen.
2. Die beiden Erzeugenden müssen so miteinander zur Deckung gebracht werden, dass die Striktionspunkte zusammenfallen.

3. Übergangsflächen zwischen einer Wendelfläche und einer zu ihrer Schraubachse senkrechten Ebene sowie Erweiterungen dieses Problems

In einem orthogonalen xyz-Koordinatensystem sei eine Wendelfläche gegeben, als Schraubachse werde die z-Achse gewählt. Eine mögliche Parameterdarstellung ist die folgende:

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ pv \end{pmatrix} .$$