

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 32 (1977)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Überdeckung eines Quadrates durch 6 kongruente Kreise  
**Autor:** Zbinden, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32148>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math.

Band 32

Heft 2

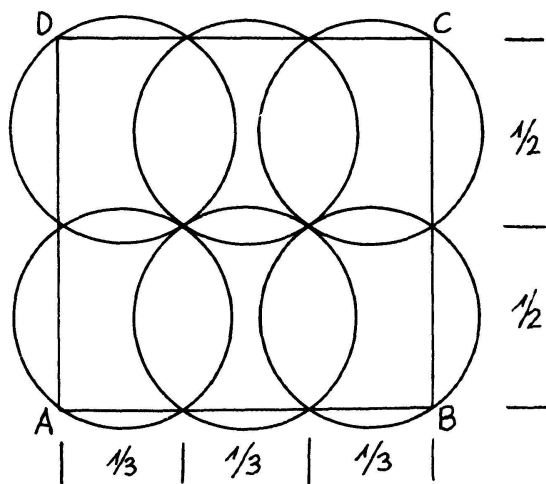
Seiten 25–48

10. März 1977

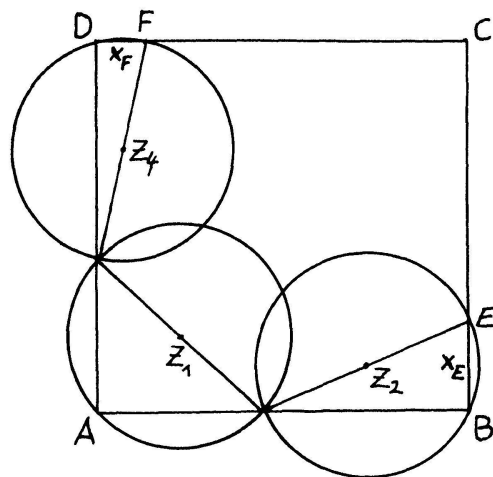
## Überdeckung eines Quadrates durch 6 kongruente Kreise

Ein Einheitsquadrat  $ABCD$  soll durch 6 kongruente Kreise  $K_1, \dots, K_6$  überdeckt werden. Im folgenden bestimmen wir den kleinstmöglichen Wert  $r_0$  für die Kreisradien, indem wir schrittweise eine derart minimale Überdeckung konstruieren.

Das Beispiel in Figur 1 zeigt, dass  $r_0 \leq \sqrt{13}/12$  ist. Die Eckpunkte  $A, B, C$  und  $D$  werden also durch 4 verschiedene Kreise  $K_1, K_2, K_3$  und  $K_4$  überdeckt. Diese Kreise bezeichnen wir als Eckkreise.



Figur 1



Figur 2

**Satz 1.** Die 4 Eckkreise einer minimalen Überdeckung decken 2 gegenüberliegende Quadratseiten vollständig, die andern 2 Seiten nur teilweise.

*Beweis.* Wegen  $r_0 \leq \sqrt{13}/12 < 5/16$  können 4 Kreise nicht 3 Seiten überdecken.

Würden die Eckkreise weniger als 2 Seiten decken, so müsste  $K_5$  oder  $K_6$  zwei (natürlich benachbarte) Seiten teilweise überdecken. Mit einem gleichgrossen Kreis könnte aber zu diesen Randstücken zusätzlich die dazwischenliegende Ecke über-

deckt werden. Es würde uns gelingen, mit 4 Kreisen vom Radius  $r_0$  3 Seiten zu decken, was wir eben als unmöglich erkannt haben.

Es bleibt zu zeigen, dass die überdeckten Seiten nicht benachbart sind. Dazu versuchen wir die Gegenannahme, dass die Seiten  $AB$  und  $AD$  vollständig durch die Eckkreise überdeckt seien. Nach dem vorigen Abschnitt können wir weiter annehmen, dass  $K_5 BC$  teilweise decke und  $K_6 CD$ .

Offensichtlich ist  $K_1 \cap K_3 = \emptyset$  und  $K_2 \cap K_4 = \emptyset$ . Weiter gilt jetzt  $K_4 \cap K_5 = \emptyset$  und  $K_2 \cap K_6 = \emptyset$ , denn (Fig. 2) es ist  $x_E < 1/4$  und deshalb  $ED > \sqrt{13}/3 \geq 4r_0$ ; entsprechend ist auch  $FB > 4r_0$ . Damit die Quadratüberdeckung doch vollständig ist, müssen sich nun  $K_5$  und  $K_6$  in  $K_1$  schneiden. Dies ist aber nicht möglich, denn wegen  $x_E < 1/4$  liegt  $K_1 \cap K_5$  ganz unterhalb der Diagonale  $AC$  und wegen  $x_F < 1/4$  liegt  $K_1 \cap K_6$  ganz oberhalb dieser Diagonale. Die Gegenannahme ist nicht haltbar.

qed

**Satz 2.** Es existiert eine minimale Überdeckung mit den Eigenschaften:

- Die Ecken liegen auf den Peripherien der Eckkreise.
- Die Schnittpunkte der Kreise liegen alle auf dem Quadrat.

*Beweis.* Wir zeigen, dass eine beliebige minimale Überdeckung durch Verschieben der Kreise in eine Überdeckung im Sinne von Satz 2 verwandelt werden kann.

Nach Satz 1 können wir annehmen, dass  $AD$  und  $BC$  durch die Eckkreise gedeckt werden, während  $K_5$  die Seite  $AB$  und  $K_6$  die Seite  $CD$  teilweise überdecken.

Zum Beweis brauchen wir den folgenden elementaren

*Hilfssatz.* Der Scheitel  $S$  eines rechten Winkels liege im Kreis  $K$  mit Radius  $r$ .  $T_1$  und  $T_2$  seien die Schnittpunkte der beiden Schenkel mit  $K$ .

Das Gebiet von  $K$ , das zwischen den beiden Schenkeln liegt, kann durch einen Kreis  $K'$  mit Radius  $r$ , der durch  $S$  und  $T_1$  geht, vollständig überdeckt werden. Mit dem Hilfssatz können wir das folgende schrittweise Verfahren begründen:

*Schritt 1.* Die 4 Eckkreise werden so verschoben, dass die Quadratedecken auf die Peripherien gelangen, wobei je ein Schnittpunkt mit einer Seite festgehalten wird. Gemäss Hilfssatz ist das Quadrat immer noch vollständig überdeckt. In den folgenden Schritten verschieben wir die Eckkreise nur noch derart, dass die Eigenschaft a) erhalten bleibt.

*Schritt 2.* Wir korrigieren nun die Schnittpunkte derjenigen Eckkreise, die die Seitenmitte  $M_4$  von  $AD$  bzw.  $M_2$  von  $BC$  nicht bedecken, mit den Kreisen  $K_5$  und  $K_6$ . Wir wollen etwa annehmen, dass  $M_4$  nicht in  $K_1$  liege und dass ein Schnittpunkt von  $K_1$  mit  $K_5$  ausserhalb des Quadrates liege. Vom zweiten Schnittpunkt der beiden Kreise aus fallen wir das Lot auf  $AB$ . Liegt der Fusspunkt  $T$  des Lotes in  $K_1 \cap K_5$ , so verschieben wir beide Kreise so, dass sie sich in  $T$  schneiden, wobei ein Schnittpunkt von  $K_5$  mit  $AB$  (derjenige näher bei  $B$ ) fixiert bleibt. Liegt  $T$  dagegen nur in einem der Kreise, so verschieben wir nur diesen Kreis, bis der Schnittpunkt mit dem andern Kreis auf  $AB$  liegt. Den Fixpunkt wählen wir gleich wie im 1. Fall. In beiden Fällen bleibt die Überdeckung gemäss Hilfssatz vollständig.

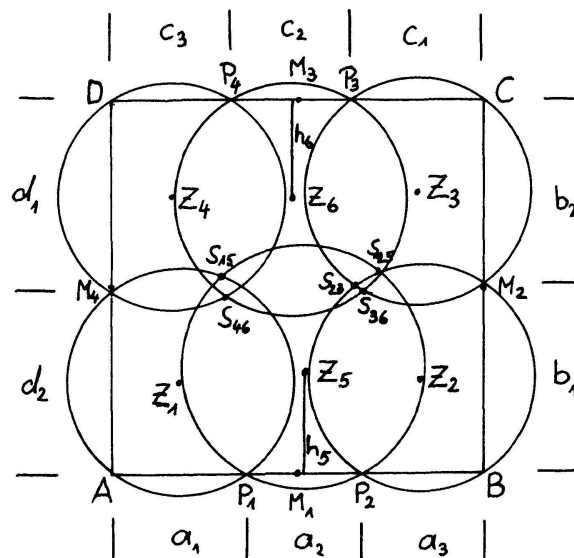
*Schritt 3.* Als nächstes korrigieren wir die Schnittpunkte von  $K_1$  mit  $K_4$  und  $K_2$  mit  $K_3$ . Falls  $M_2$  bzw.  $M_4$  im Schnitt zweier Eckkreise liegt, so verschieben wir die

beiden Kreise, bis sie sich in dieser Seitenmitte treffen. Andernfalls verschieben wir nur denjenigen Kreis, der die Seitenmitte bedeckt, bis sich die Kreise auf dem Quadratrand schneiden. Wie leicht zu zeigen ist, schneiden sich die beiden Kreispaaire im Quadratinnern je auf der Mittellinie  $M_2M_4$ ; deshalb kann auch hier wieder der Hilfssatz zitiert werden.

*Schritt 4.* Zuletzt korrigieren wir noch die Schnittpunkte derjenigen Eckkreise, die  $M_2$  bzw.  $M_4$  bedecken, mit den Kreisen  $K_5$  und  $K_6$ . Nehmen wir diesmal an,  $K_1$  überdecke  $M_4$ . Das im Schnittpunkt  $P_1$  von  $K_1$  mit  $AB$  auf der Seite  $AB$  errichtete Lot liegt im Quadratinnern ganz in  $K_1 \cap K_4$  (die beiden Kreise schneiden sich auf  $M_2M_4$ ). Wir können deshalb einfach  $K_5$  verschieben, bis  $P_1$  auf dessen Peripherie liegt, wobei wir den Fixpunkt wie in Schritt 2 wählen.

Mit diesen 4 Schritten sind wir zu einer minimalen Überdeckung gelangt, die a) und b) erfüllt. qed

Von jetzt an betrachten wir ohne ausdrücklichen Vermerk nur noch Überdeckungen, die die beiden Eigenschaften aus Satz 2 besitzen. Dabei werden wir stets die Bezeichnungen aus Figur 3 verwenden. Vorgreifend auf später folgende Beispiele werden wir schon die verbesserte Abschätzung  $r < \sqrt{13}/12$  verwenden.



Figur 3

Mit der neuen Abschätzung folgt, dass  $a_1 < 1/3$  oder  $c_3 < 1/3$  und also  $K_5 \cap K_3 = \emptyset$  oder  $K_6 \cap K_2 = \emptyset$  ist. (Es kann natürlich nur eines der Paare disjunkt sein.) Ebenso ist entweder  $K_5 \cap K_4 = \emptyset$  oder  $K_6 \cap K_1 = \emptyset$ . Wir können  $K_6 \cap K_2 = \emptyset$  voraussetzen und die beiden Fälle  $K_6 \cap K_1 = \emptyset$  und  $K_5 \cap K_4 = \emptyset$  einzeln untersuchen.

**1. Fall.**  $K_6 \cap K_2 = \emptyset$  und  $K_6 \cap K_1 = \emptyset$ .

Das Quadrat kann nur vollständig überdeckt sein, wenn der Rand überdeckt ist und ausserdem  $S_{36} \in K_5$  und  $S_{46} \in K_5$  gilt. Diese Forderungen genügen auch

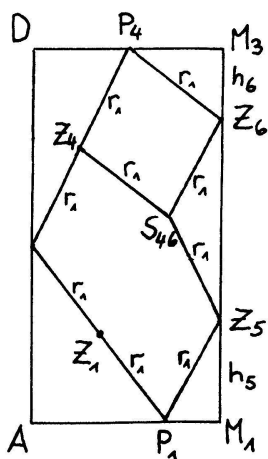
schon, denn es folgt  $S_{15} \in K_4$  und  $S_{25} \in K_3$ . Wir suchen nun den kleinstmöglichen Radius  $r_1$  für eine Überdeckung mit den obigen Nebenbedingungen.

**Satz 3.** Es existiert eine Überdeckung mit Kreisradien  $r_1$  und den folgenden beiden Eigenschaften:

- Die Überdeckung ist symmetrisch bezüglich der Mittellinie  $M_1 M_3$ .
- $S_{36}$  und  $S_{46}$  liegen auf der Peripherie von  $K_5$ .

*Beweis.*  $A_1$  sei eine beliebige unter Fall 1 minimale Überdeckung. Ausgehend von  $A_1$  konstruieren wir eine Überdeckung  $A_2$  wie folgt (die hochgestellten Indizes geben die Überdeckung an):

$Z_6^2$  wählen wir auf  $M_1 M_3$  mit  $h_6^2 = h_6^1$ . Die übrigen Kreise wählen wir so, dass die Bedingungen aus Satz 2 wiederum erfüllt sind.  $Z_5^2$  liegt natürlich auf  $M_1 M_3$  und es ist  $h_5^2 \geq h_5^1$ . Wir müssen noch zeigen, dass  $S_{36}^2$  und  $S_{46}^2$  in  $K_5^2$  liegen. Dazu führen wir in beiden Überdeckungen den Hilfspunkt  $P^1$  bzw.  $P^2$  ein, der  $S_{36} Z_6 S_{46}$  zu einem Rombus ergänzt.  $P^1$  und  $P^2$  liegen beide auf  $M_1 M_3$  und für die Distanz  $p$  von  $M_1$  gilt  $p^2 \leq p^1$ . Wegen  $S_{36}^1 Z_6^1 \leq r_1$  und  $S_{46}^1 Z_5^1 \leq r_1$  ist ferner  $p^1 \leq h_5^1$ . Es folgt jetzt  $p^2 \leq h_5^2$ , und da  $Z_5^2$  ebenfalls auf  $M_1 M_3$  liegt, sind  $S_{36}^2$  und  $S_{46}^2$  in  $K_5^2$ .  $A_2$  ist also eine symmetrische Überdeckung mit Kreisradien  $r_1$ .  $A_2$  besitzt aber auch die Eigenschaft b), denn wären die Strecken  $S_{36}^2 Z_6^2$  und  $S_{46}^2 Z_5^2$  kleiner als  $r_1$ , so könnte auf offensichtliche Weise eine symmetrische Überdeckung mit kleineren Kreisradien konstruiert werden. qed



Figur 4

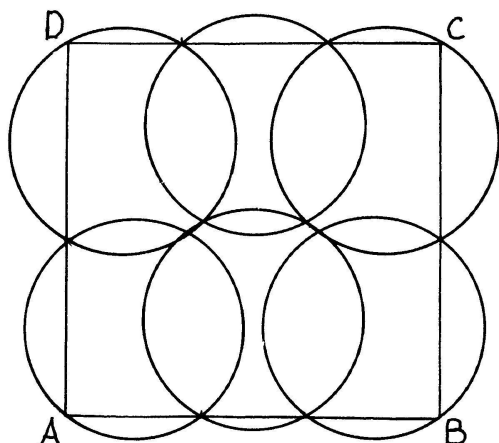
Was nach Satz 3 übrig bleibt, ist eine Schar von Überdeckungen, die durch das in Figur 4 dargestellte Gerüst charakterisiert werden. Der Radius  $r$  einer solchen Überdeckung ist nur noch von  $d_1$  abhängig. Die numerische Bestimmung des Minimums  $r_1$  von  $r(d_1)$  ist unproblematisch, da die Funktion äusserst flach verläuft. Die Berechnung ergibt

$$r_1 = 0.29895 \text{ für } d_1 = 0.5214.$$

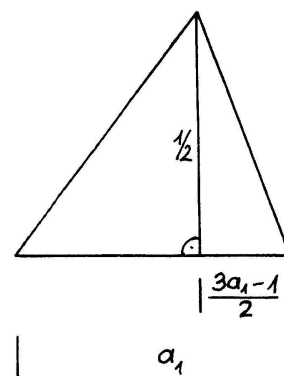
Die für Fall 1 minimale Überdeckung ist in Figur 5 dargestellt.

**2. Fall.**  $K_6 \cap K_2 = \emptyset$  und  $K_5 \cap K_4 = \emptyset$ .

In diesem zweiten Fall muss  $S_{36} \in K_5$  und  $S_{15} \in K_6$  sein. Es folgt dann weiter  $S_{46} \in K_1$  und  $S_{25} \in K_3$ . Wir suchen wieder den kleinstmöglichen Radius  $r_2$  für eine Überdeckung der betrachteten Klasse.



Figur 5



Figur 6

**Satz 4.** Es existiert eine Überdeckung mit Kreisradien  $r_2$  und den folgenden beiden Eigenschaften:

- Die Überdeckung ist symmetrisch bezüglich des Quadratmittelpunktes mit einem Symmetriewinkel von  $180^\circ$ .
- $S_{36}$  liegt auf der Peripherie von  $K_5$  und  $S_{15}$  liegt auf der Peripherie von  $K_6$ .

*Beweis.* Wir beweisen zuerst den folgenden

*Hilfssatz.* Für die unter Fall 2 betrachteten Überdeckungen gilt:

$$a_1 \geq c_1 \triangleright a_1 \geq a_2$$

und  $a_1 = a_2 \triangleright a_1 = c_1$ .

*Beweis des Hilfssatzes:*

Sei  $a_1 \geq c_1$  und  $a_1 \leq a_2$ . Dann ist  $a_3 \geq c_3$  und  $a_3 \leq 1 - 2a_1$ . Für den Kreisradius  $r$  der Überdeckung erhalten wir wegen  $c_3 = \sqrt{a_1^2 - 1 + 2\sqrt{4r^2 - a_1^2}}$  die Abschätzung

$$r^2 \leq (9/16)a_1^4 - (3/2)a_1^3 + 2a_1^2 - a_1 + (1/4).$$

Gleichheit kann höchstens im Falle  $a_1 = c_1$  gelten.

Eine weitere Ungleichung für  $r$  erhalten wir, indem wir den Radius von  $K_5$  durch den Umkreisradius  $\rho$  des Dreiecks  $P_1P_2S_{23}$  nach unten abschätzen. Die Grundseite  $P_1P_2$  des Dreiecks ist mindestens  $a_1$ , die Höhe beträgt gerade  $1/2$ .

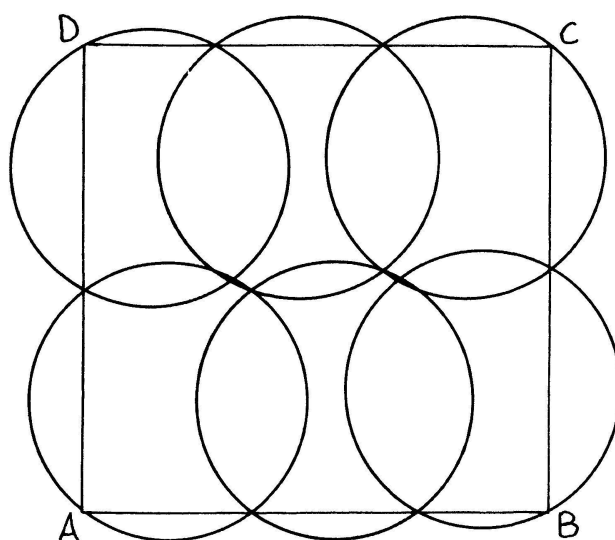


Gemäss Konstruktion ist in  $\mathcal{A}_2$   $a_1 = c_1$  oder  $a_1 = a_2$ . Im zweiten Fall folgt aber mit dem Hilfssatz wiederum  $a_1 = c_1$  und folglich besitzt  $\mathcal{A}_2$  die Eigenschaft a). Die symmetrische Überdeckung  $\mathcal{A}_2$  muss aber auch die Eigenschaft b) besitzen, denn sonst wäre sie nicht minimal. Da aber  $\mathcal{A}_1$  minimal ist, muss auch  $\mathcal{A}_2$  minimal sein.

qed

Wegen Satz 4 können wir nun auch Fall 2 auf einfache Weise numerisch durchrechnen, denn wiederum ist  $r$  nur noch abhängig von  $d_1$ . Die Berechnung ergibt:

$$r_2 = 0.29873 \text{ für } d_1 = 0.5264.$$



Figur 8

In Figur 8 ist diese minimale Überdeckung gezeichnet.

Der minimale Kreisradius einer Überdeckung des Einheitsquadrates durch 6 gleiche Kreise beträgt

$$r_0 = 0.29873.$$

### Ausblick

Vom Problem, das Einheitsquadrat durch  $n$  kongruente Kreise mit minimalem Radius zu überdecken, wurden in [1] die Fälle  $n \leq 5$  gelöst. In [2] wird der Fall  $n = 7$  gelöst. Immer wurde dabei die minimale Überdeckung von der Überdeckung des Quadratrandes her bestimmt. In dem hier vorgeführten Lösungsweg für  $n = 6$  wird auch zuerst die Randüberdeckung gesucht, aber die gewonnene Information reicht zur Bestimmung der minimalen Überdeckung nicht aus.

Das Gesamtproblem muss wohl über Näherungen angegangen werden. Für grosse Werte von  $n$  bietet sich als erste Näherung die Überdeckung an, bei der die Kreiszentren ein regelmässiges Dreiecksgitter bilden, wie bei der optimalen Über-

deckung der ganzen Ebene durch gleiche Kreise. Das regelmässige Gitter wird aber durch den Quadratrang gestört. Diese Randstörung kann offenbar stark von  $n$  abhängig sein.

A. Zbinden, Bern

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aufgabe 692, Problem 692A, *El. Math.* 29, 49–51 (1974).  
 [2] M. GOLDBERG, *Covering a Square by Equal Circles*, unveröffentlicht.

## Übergangsflächen bei Regelschraubflächen

### 1. Problemstellungen

Während früher Wendelflächen in der Bautechnik nur selten angewandt wurden und wohl hauptsächlich als Unterseiten bei Wendeltreppen zu beobachten waren, treten sie in letzter Zeit recht häufig in Erscheinung als Auffahrten in Parkhäusern und -decks, als Verbindungen kreuzungsfreier Strassen und als Brückenauffahrten. In diesem Zusammenhang stellt sich das Problem, gewisse Regelschraubflächen, zumeist Wendelflächen, knicklos mit Ebenen zu verbinden; ebenso sind gelegentlich Regelschraubflächen verschiedener Ganghöhen knicklos ineinander überzuleiten. Diese Probleme werden in der Praxis wohl empirisch gelöst, doch lassen sich in der Tat einfach erzeugbare Übergangsflächen angeben.

### 2. Vorbetrachtungen

Haben zwei windschiefe Regelflächen eine Erzeugende gemeinsam, so berühren sie einander bekanntlich nicht längs dieser Erzeugenden, sondern im allgemeinen nur in zwei Punkten auf ihr. Sollen sie einander in jedem Punkt der gemeinsamen Erzeugenden berühren, so sind die beiden folgenden Bedingungen zu erfüllen:

1. Der Drall beider Regelflächen muss längs der gemeinsamen Erzeugenden übereinstimmen.
2. Die beiden Erzeugenden müssen so miteinander zur Deckung gebracht werden, dass die Striktionspunkte zusammenfallen.

### 3. Übergangsflächen zwischen einer Wendelfläche und einer zu ihrer Schraubachse senkrechten Ebene sowie Erweiterungen dieses Problems

In einem orthogonalen  $xyz$ -Koordinatensystem sei eine Wendelfläche gegeben, als Schraubachse werde die  $z$ -Achse gewählt. Eine mögliche Parameterdarstellung ist die folgende:

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos v \\ u \cdot \sin v \\ pv \end{pmatrix} .$$