Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 32 (1977)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

menden Folge von Parallelepipeden nach (1) selbst zentralsymmetrisch. Daraus und aus dem Hilfssatz folgt (4) und der Beweis des Satzes ist erbracht.

Vermutlich kann man die eingangs gestellten Fragen auch für die Klasse der Teilmengen des $\mathbf{R}^d$ positiv beantworten, die sich als direkte Summen der Form $S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_r \oplus C \oplus L$ darstellen lassen. Dabei bezeichnen $S_1, \ldots, S_r$ Simplexe und C und L einen simplizialen Kegel bzw. einen Unterraum des $\mathbf{R}^d$ (vgl. [3]).

Peter M. Gruber, Universität Linz, Österreich

LITERATURVERZEICHNIS

[1] V. Borovikov, *On the Intersection of a Sequence of Simplices*, Uspehi Mat. Nauk *7*, No.6 (52), 179–180 (1952) (Russ.); MR *14*, 784 (1953).

[2] H.G. Eggleston, B. Grünbaum und V. Klee, *Some Semicontinuity Theorems for Convex Polytopes and Cell-Complexes*, Comm. Math. Helv. *39*, 165–188 (1964).

[3] P. Gruber, *Zur Charakterisierung konvexer Körper. Über einen Satz von Rogers und Shephard. I, II*, Math. Annalen *181*, 189–200 (1969); *184*, 79–105 (1970).

[4] A.B. Harazišvili, *Charakteristische Eigenschaften des Parallelepipeds*, Soobščenija Akad. Nauk Gružin SSR *72*, 17–19 (1973) (Russ.); Zbl. *274*, 52005 (1974).

[5] R.R. Phelps, *Lectures on Choquet's Theorem*, Van Nostrand Math. Studies, Bd.7 (Van Nostrand, Princeton, N.J., 1966).

[6] C.A. Rogers und G.C. Shephard, *The Difference Body of a Convex Body*, Arch. Math. *8*, 220–233 (1957).

Aufgaben

Aufgabe 757. Webb has shown (El. Math. *29* [1974], 1–5) that if p is a prime, k an integer, $k \geq 4$ and $p \nmid k$, and if there are integers $x, y, z\,(0 < x \leq y \leq z)$ such that

$$\frac{k}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \tag{*}$$

then $x < 2p/k$ unless either $k \mid 2p+1$ and $x = (2p+1)/k$, or $k \mid p+1$ and $x = 2(p+1)/k$. Show that this result is sharp, in the following sense: given an integer $k \geq 4$ and a real number ε, $0 < \varepsilon < 2$, one can find an arbitrarily large prime p with $p \nmid k$, and integers $x, y, z\,(0 < x < y < z)$ such that (*) holds and that $2 - \varepsilon < kx/p < 2$. (Note that this does not answer the question in Webb's paper, of how close to $2(p+1)/k$ the smallest value of x, among all solutions of (*), can be.)

J. Steinig, Geneva

Lösung des Aufgabenstellers. We consider rationals of the form

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)p} = \frac{(2x+1)p+1}{x(x+1)p}; \tag{**}$$

we choose the positive integer x such that $(x+1)^{-1} \leqslant \varepsilon$, and that $(2x+1, k) = 1$. Then we have $\big(2x+1, kx(x+1)\big) = 1$, and we can solve the congruence

$$(2x+1)p+1 \equiv 0 \,(\operatorname{mod} kx(x+1)) .$$

Let p be a prime which satisfies this congruence. Then, the right hand side of (**) is of the form kn/p, where n is a positive integer, and $p \nmid kn$. Also, $(xkn/p) < 2$, and

$$\frac{xkn}{p} = \frac{(2x+1)p+1}{(x+1)p} = 2 - \frac{p-1}{(x+1)p} > 2 - \frac{1}{x+1} \geqslant 2 - \varepsilon .$$

Hence, on dividing (**) throughout by n, we get a rational number k/p with the desired properties.

Aufgabe 758. Sei a ganz, und p_n bezeichne die n-te Primzahl. Man zeige: $a \neq \pm 1$ genau dann, wenn es zu a ein reelles x gibt, so dass $L(a, x) := \liminf_{n \to \infty} \| x(p_n + a) \|$ positiv ist; hier ist $\|y\| := \operatorname{Min}(y - [y],\ 1 + [y] - y)$ für reelles y gesetzt und $[y]$ die grösste ganze Zahl $\leq y$. (Man benutze eventuell die Tatsache, dass für irrationales reelles z die Folge $(zp_n - [zp_n])_{n=1,2,\ldots}$ jeden Punkt des Intervalls $[0, 1]$ als Häufungspunkt besitzt.) P. Bundschuh, Köln, BRD

Lösung des Aufgabenstellers. Im Fall $a = 0$ nehme man $x = 1/2$ und hat dann $L(0, 1/2) = 1/2$; für $|a| \geqslant 2$ nehme man $x = 1/a$ und erhält $L(a, 1/a) \geqslant 1/|a|$. Nun sei $a = -1$. Dann ist für rationales $x = P/Q$, $Q > 0$ klar, dass $L(-1, P/Q) = 0$; denn nach dem Dirichlet'schen Primzahlsatz gibt es unendlich viele Primzahlen p'_n mit $p'_n \equiv 1 \ (\operatorname{mod} Q)$, und für diese ist $\| (P/Q)\ (p'_n - 1) \| = 0$. Für irrationales x gibt es eine unendliche Folge von Primzahlen p''_n, für die $\lim (xp''_n - [xp''_n]) = x - [x]$, für die also $\lim \| x(p''_n - 1) \| = 0$. Somit ist $L(-1, x) = 0$ für jedes reelle x. Der Fall $a = 1$ erledigt sich analog.

Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Mollens VS) und Chr. A. Meyer (Bern).

Aufgabe 759. In einer Ebene sind drei Kreise gegeben. Deren 8 Schnittpunkte (imaginäre Kreispunkte inbegriffen) bestimmen ein Büschel von Kurven 3. Ordnung. Man zeige:

a) Der neunte Grundpunkt dieses Büschels ist der Punkt P gleicher Potenz in bezug auf die drei Kreise.

b) Die Tangente in P ist für jede Büschelkurve parallel zu deren reeller Asymptote.

c) Für jede Büschelkurve liegt der reelle Punkt der imaginären Asymptoten auf dem Kreis durch die Zentren der gegebenen Kreise. C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers. a) Wählt man das Potenzzentrum P der 3 Kreise als Ursprung O eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so lauten die Gleichungen der letzteren

$$K_i = x^2 + y^2 + a_i x + b_i y + c = 0 ; \quad i = 1, 2, 3 . \tag{1}$$

Dabei ist c die gemeinsame Potenz von O bezüglich dieser Kreise. Die Gleichung

$$\Phi \equiv \lambda_1 K_2 K_3 + \lambda_2 K_3 K_1 + \lambda_3 K_1 K_2 = 0, \tag{2}$$

in der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reelle Parameter mit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ bedeuten, stellt alsdann das Büschel der Kurven 3. Ordnung durch die 8 Schnittpunkte der 3 Kreise (1) dar. Das Absolutglied in (2) ist $= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, c^2 = 0$; es gehen also alle Kurven des Büschels (2) durch O.

b) Die Gleichung der Tangente in O an eine Büschelkurve wird erhalten durch Nullsetzen des Linearteils von (2), also

$$\lambda_1 c\,\big((a_2 + a_3)\,x + (b_2 + b_3)\,y\big) + \cdots = 0.$$

Andererseits sind die unendlich fernen Kurvenpunkte durch die Glieder 3. Grades bestimmt, also durch die Gleichung

$$\lambda_1\,(x^2 + y^2)\,\big((a_2 + a_3)\,x + (b_2 + b_3)\,y\big) + \cdots = 0.$$

Sie liegen also, abgesehen von den imaginären Kreispunkten, auf den Tangenten in O.

c) Die Gleichungen der imaginären Asymptoten erhält man, nach Homogenisierung von (2), als Tangentengleichungen in $U_{1,2}(1, \pm i, 0)$. Diese haben komplexe Koeffizienten. Für den reellen Punkt müssen Real- und Imaginärteil der linken Seite der Gleichung verschwinden. Das ergibt zwei in den λ_i lineare homogene Gleichungen, zu denen als dritte $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ tritt. Die Elemente in den beiden ersten Zeilen der Systemdeterminante D sind linear in $x, y, z\,(=1)$, während die 3. Zeile 1, 1, 1 lautet. Der gesuchte Ort für den reellen Punkt der Asymptoten, gegeben durch $D = 0$, ist also ein Kegelschnitt. Man verifiziert leicht, dass es sich um einen Kreis durch die Punkte $(-a_i/2, -b_i/2)$, $i = 1, 2, 3$ handelt.

Weitere Lösungen sandten J. T. Groenman (Groningen, Niederlande) und L. Kuipers (Mollens VS).

Aufgabe 760. a) Im n-dimensionalen Würfel mit ganzzahliger Kantenlänge m:

$$W_m := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid 0 \le x_i \le m \text{ für } i = 1, \ldots, n\}$$

bildet man für $s = 1, \ldots, r\,(r \le m)$ aus

$$J_{is} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid x_j = 0 \text{ für } j \neq i,\ 0 \le x_i \le s-1 \text{ oder } s \le x_i \le m\}$$

die Mengen

$$A_s := J_{1s} \times J_{2s} \times \ldots \times J_{ns}$$

und betrachtet den Restkörper

$$R_{m,r} := W_m \setminus \bigcup_{s=1}^{r} A_s.$$

Man berechne den Volumeninhalt dieses Restkörpers und formuliere das Resultat mit Hilfe der Stirling-Zahlen 2. Art:

$$S_{k,r}: = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} (r-i)^k .$$

b) n Urnen enthalten je m mit den Nummern 1, ..., m numerierte Lose. Aus jeder Urne werde genau ein Los gezogen. Welches kombinatorische Abzählproblem wird durch das Resultat von a) gelöst? R. Wyss, Flumenthal SO

Lösung. $|K|$ bezeichne den Inhalt des Körpers K. Aus der Definition der Mengen A_s folgt unmittelbar

$$|A_{s_1} \cap A_{s_2} \cap \ldots \cap A_{s_\nu}| = (m-\nu)^n$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, r$ und jeweils aller ν-Kombinationen von Indizes aus $\{1, 2, \ldots, r\}$. Anwendung des Inklusions-Exklusions-Prinzips ergibt

$$|R_{m,r}| = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} (m-\nu)^n . \tag{1}$$

Es seien $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $M = \{1, 2, \ldots, r, r+1, \ldots, m\}$, F_m die Menge aller Abbildungen f: $N \to M$ und B_s die Menge aller Abbildungen $f \in F_m$ mit $s \notin f(N)$ ($s = 1, 2, \ldots, r$; $r \leqslant m$). Dann gilt

$$\operatorname{card}(B_{s_1} \cap B_{s_2} \cap \ldots \cap B_{s_\nu}) = (m-\nu)^n .$$

$B_{m,r} = F_m \setminus \bigcup_{s=1}^{r} B_s$ ist dann die Menge aller Abbildungen $f \in F_m$ mit $\{1, 2, \ldots, r\} \subset f(N)$. Wie oben ergibt das Inklusions-Exklusionsprinzip sofort

$$\operatorname{card} B_{m,r} = |R_{m,r}| . \tag{2}$$

Das zugehörige Urnenproblem lautet daher z. B.: Bei wievielen der zulässigen Züge fehlt keines der Lose mit den Nummern 1 bis und mit r?

Es sei $C_{k,r}$ die Menge der Surjektionen einer k-Menge auf eine r-Menge. Dann gilt bekanntlich

$$\operatorname{card} C_{k,r} = r!\, S_{k,r} . \tag{3}$$

Jede Abbildung aus $B_{m,r}$ ist eine Surjektion von N auf eine Menge $\{1, 2, \ldots, r\} \cup M_\nu$, wobei M_ν eine ν-Teilmenge von $\{r+1, \ldots, m\}$ ist, $0 \leqslant \nu \leqslant m-r$. Daraus ergibt sich mit (2) und (3)

$$|R_{m,r}| = \sum_{\nu=0}^{m-r} (r+\nu)! \binom{m-r}{\nu} S_{n,r+\nu} \tag{4}$$

als die gewünschte Formulierung mit Hilfe der Stirlingzahlen 2. Art.

Problemgruppe Bern

Anmerkung der Redaktion. M. Vowe und R. Wyss geben das Resultat in der mit (4) gleichwertigen Form

$$|R_{m,r}| = r! \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} (m-r)^{n-k} S_{k,r}.$$

Weitere Lösungen sandten R.A. Razen (Leoben, Österreich) und M. Vowe (Therwil BL).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. August 1977** an **Dr. H. Kappus.** Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46), Problem 672A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724A (Band 30, p. 91). Problem 764A (Band 31, p. 44).

Aufgabe 781. $A = (a+md)_{m=0,1,2,\ldots}$ sei eine arithmetische Folge mit $a, d \in N$. Man beweise:

a) Jedes Glied von A ist Anfangsglied unendlich vieler geometrischer Teilfolgen von A mit ganzzahligen, paarweise teilerfremden Quotienten.

b) Jedes Glied von A ist Anfangsglied unendlich vieler Teilfolgen von A, von denen jede die Partialsummenfolge einer geometrischen Folge mit ganzzahligem Quotienten ist.

J. Binz, Bolligen

Aufgabe 782. Sind C_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ n nichtleere, kompakte und konvexe Polygone der Ebene, $A = \bigcup_{\nu=1}^{n} C_\nu$ ihre Vereinigungsmenge und $A^* = \operatorname{cmpl} A$ die Komplementärmenge, so soll p die Anzahl der abgeschlossenen, paarweise disjunkten und zusammenhängenden Teilmengen bedeuten, in die A zerlegbar ist, während p^* analog die Anzahl der offenen, paarweise disjunkten und zusammenhängenden Teilmengen bezeichne, in die A^* zerlegt werden kann. Man zeige, dass für die Komponentenzahlen p und p^* die Ungleichung

$$-(n-1)(n-2) \leqslant 2(p-p^*) \leqslant 2(n-1)$$

besteht.

H. Hadwiger, Bern

Problem 782A. Werden – in der Notation der Aufgabe 741 (El. Math. 30 (1975), p. 62) – die Mittelpunkte der Strecken A_1P_a, B_1P_b, C_1P_c in dieser Reihenfolge mit $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ bezeichnet, so gelten vermutlich die beiden folgenden Aussagen:

a) Das Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ist zum Ausgangsdreieck ABC ähnlich.

b) Der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Neunpunktekreises im Dreieck ABC ist Umkreismittelpunkt des Dreiecks $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Hj. Stocker, Wädenswil ZH

Berichtigung zu Aufgabe 776 (Bd. 31, p. 124):
Es muss heissen:
Es seien $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geq 2)$ *positive* reelle Zahlen mit $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Literaturüberschau

Determinanten und Matrizen. Von F. Neiss und H. Liermann. 8. neubearbeitete Auflage. 182 Seiten. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1975.

Die bewährte Schrift von Neiss über Determinanten und Matrizen hat mit der 8. Auflage eine völlige Umgestaltung erfahren. In den 30 Jahren seit dem Erscheinen der 1. Auflage sind Entwicklungen eingetreten, die eine Neubearbeitung nach Inhalt und Darstellungsform erforderlich machten. Der Bearbeiter H. Liermann hat nun die Theorie der Matrizen und Determinanten als Teilgebiet der linearen und der multilinearen Algebra konzipiert und behandelt. Der strukturelle Aspekt erhält damit ein wesentlich grösseres Gewicht, als dies in der ursprünglichen Fassung der Fall war. Die einzelnen Kapitel der Neubearbeitung tragen folgende Überschriften: Grundlagen (Mengentheoretische Begriffe, Abbildungen, Verknüpfungen), Vektorräume und lineare Abbildungen, Matrizen, Determinanten, Systeme linearer Gleichungen, Euklidische Vektorräume, Quadratische Formen.

Was den behandelten Stoff anbetrifft, weicht die Neufassung nur unwesentlich vom Neißschen Original ab. Dagegen ist der Umfang auf die doppelte Seitenzahl angewachsen, weil Liermann der Schrift einen grössern Tiefgang gegeben hat. Er hat sie zu einer zeitgemässen Einführung in die lineare Algebra ausgebaut. Gegenüber dem Original ist das Büchlein um einiges theoretischer geworden. Aber dieser Trend ist nun einmal nicht aufzuhalten. Die Neufassung ist jedenfalls bestens geeignet, eine Vorlesung über lineare Algebra zu unterstützen. Sie dürfte daher Mathematik-Studenten in den untern Semestern eine echte Hilfe sein. Überdies glaube ich, dass sie für Mathematik-Lehrer eine wertvolle Informationsbasis darstellt. M. Jeger

Stochastik. Von F. Heigl und J. Feuerpfeil. BSV-Mathematik, Leistungskurs. 247 Seiten. Bayerischer Schulbuchverlag, München 1975.

Das Buch ist in erster Linie für Leistungskurse der Kollegstufe bestimmt. Es beginnt mit der Behandlung des Ergebnisraumes und des Ereignisraumes. Dieser Abschnitt ist sehr ausführlich gehalten: Auch die grundlegenden Begriffe der Mengenlehre werden nochmals dargestellt; ‹Mengensprache› und ‹Ereignissprache› werden einander sorgfältig gegenübergestellt. Dann folgen Betrachtungen über die relative Häufigkeit und ihre eventuell vorhandene Stabilität, anschliessend die Kolmogoroffschen Axiome und erste Folgerungen daraus. Besonders wertvoll scheinen uns hier die grundsätzlichen Betrachtungen über die axiomatische Einführung mathematischer Begriffe; es bieten sich an dieser Stelle ja tatsächlich ausgezeichnete Möglichkeiten, Schüler der oberen Klassen höherer Schulen etwas in die axiomatische Methode einzuführen. Dann wird die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung sehr ausführlich dargestellt; sie wird abgeschlossen durch eine anschauliche Behandlung der Normalverteilung. Es scheint uns, man hätte die Beispiele und Aufgaben etwas stärker variieren dürfen; wird nicht etwas viel einfach ‹gewürfelt›? – Mit besonderem Interesse wird der Leser das letzte Kapitel verfolgen, das der Einführung in die mathematische Statistik gewidmet ist. Es ist dies ja ein Gebiet, das in den meisten für die Schule bestimmten Einführungen nur sehr propädeutisch behandelt wird. Hier wird anders vorgegangen: Die Verfasser versuchen an Hand des Problems ‹unbekannte Wahrscheinlichkeit›