

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 32 (1977)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Ein Analogon zu den ganzzahligen pythagoräischen Dreiecken  
**Autor:** Hasse, Helmut  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32146>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

---

El. Math.

Band 32

Heft 1

Seiten 1–24

10. Januar 1977

---

## Ein Analogon zu den ganzzahligen pythagoräischen Dreiecken

1. Auf ein solches Analogon wurde kürzlich durch eine Aufgabe von E. Kramer (Ljubljana) aufmerksam gemacht<sup>1)</sup>, in der verlangt wurde, bestimmte Angaben über die arithmetische Natur der ganzzahligen primitiven Dreiecke mit Spitzenwinkel  $120^\circ$  zu bestätigen. Arithmetisch ausgedrückt handelt es sich um die Lösungen der diophantischen Gleichung

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 \quad (1)$$

in teilerfremden natürlichen Zahlen  $a, b, c$ . Vom geometrischen wie auch vom arithmetischen Standpunkt aus erscheint es naturgemäss, auch die Dreiecke mit Spitzenwinkel  $60^\circ$  in die Betrachtung einzubeziehen, was auf die diophantische Gleichung

$$a^2 - ab + b^2 = c^2$$

hinausläuft, oder also auf die Zulassung auch negativer ganzer Zahlen in (1), wobei dann die beiden Fälle  $ab > 0$  und  $ab < 0$  (im folgenden *Plustyp* und *Minustyp* genannt) zu unterscheiden sind. Der Fall  $ab = 0$  ist geometrisch wie arithmetisch uninteressant und sei im folgenden durchweg stillschweigend ausgeschlossen.

2. Es sei zunächst daran erinnert, dass die ganzzahligen primitiven *pythagoräischen* Dreiecke (Spitzenwinkel  $90^\circ$ )

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (2)$$

---

<sup>1)</sup> Amer. Math. Monthly 82 (1975), N° 10, E. 2566.

bekanntlich durch die Parameterdarstellung

$$a = u^2 - v^2, b = 2uv \text{ mit } (u, v) = 1, u \not\equiv v \pmod{2} \quad (3)$$

und dann

$$c = u^2 + v^2$$

geliefert werden. Man beweist das am elegantesten durch den Ansatz

$$\gamma = a + bi \text{ mit } i^2 = -1,$$

bei dem dann Normbildung  $N(\gamma) = a^2 + b^2 = c^2$  liefert. Die bekanntlich eindeutige Primzerlegung im quadratischen Zahlkörper von  $i = \sqrt{-1}$  lässt leicht erkennen, dass bei Primitivität der Lösung  $a, b, c$  von (2), d.h. für  $(a, b) = 1$ , und bei durch  $a \equiv 1, b \equiv 0 \pmod{2}$  festgelegter Reihenfolge von  $a, b$  notwendig  $\gamma = \varphi^2$  mit ganzem  $\varphi = u + vi$  ist, woraus sich die angegebene Parameterdarstellung (3) ergibt.

3. Diese wohlbekannte, hier nur kurz skizzierte Schlussführung für die pythagoräischen Dreiecke (2) überträgt sich auf die hier zu betrachtenden stumpf- bzw. spitzwinkligen Dreiecke (1) wie folgt.

Man setze

$$\gamma = a + b\rho = \frac{(2a+b) + b\sqrt{-3}}{2} \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$$

(primitive 6. Einheitswurzel,  $\rho^2 = \rho - 1$ ). (4)

Dann drückt sich die zu untersuchende Gleichung (1) wie folgt aus:

$$N(\gamma) = \frac{(2a+b)^2 + 3b^2}{2^2} = a^2 + ab + b^2 = c^2, \quad (5)$$

mit ganzrationalen teilerfremden  $a, b, c$ . Die so definierte ganze Zahl aus dem quadratischen Zahlkörper  $K$  von  $\sqrt{-3}$  ist primitiv, d.h. ohne natürliche Teiler ausser 1. Daher ist  $\gamma$  nicht teilbar durch alle in  $K$  unzerlegten Primzahlen, die  $p \equiv -1 \pmod{3}$ , und auch nicht durch den Primteiler  $1 + \rho$  der einzigen in  $K$  verzweigten Primzahl  $3 \cong (1 + \rho)^2$ , weil aus  $1 + \rho | \gamma$  im Hinblick auf  $N(1 + \rho) = 3$  nach (5) folgte  $3 | c$  und daraus in geläufiger Weise der Reihe nach weiter  $3 | 2a + b$ ,  $3 | b$ ,  $3 | a$ , im Widerspruch zu der vorausgesetzten Primitivität der Lösung  $a, b, c$ .

In der bekanntlich eindeutigen Primzerlegung von  $\gamma$  in  $K$  treten demnach nur Primteiler  $\pi$  der in  $K$  vollzerlegten Primzahlen  $p \equiv 1 \pmod{3}$  auf, und zwar jeweils höchstens einer der beiden konjugierten  $\pi, \bar{\pi}$  und dieser im Hinblick auf (5) notwendig zu geradem Exponenten. Auf Grund dieser Beschaffenheit der Primzerlegung von  $\gamma$  hat man  $\gamma = \varepsilon \varphi^2$  mit ganzem  $\varphi$  und einer Einheit  $\varepsilon = \rho^v$  aus  $K$ . Wegen  $\rho = -(\rho^2)^2$  kann dabei noch  $\varphi$  so normiert werden, dass  $\varepsilon = \pm 1$ , also  $\gamma = \pm \varphi^2$  ist.

Sieht man von der Mitführung der entgegengesetzten  $-a$ ,  $-b$  zu den Lösungspaaren  $a, b$  von (1) ab, so kann man sich auf

$$\gamma = \varphi^2 \quad (6)$$

beschränken. Setze dann

$$\varphi = u + v\rho \quad (7)$$

mit ganzrationalen Koordinaten  $u, v$ , die wegen der Primitivität von  $\gamma$  (und damit von  $\varphi$ ) teilerfremd sind und wegen  $1 + \rho \nmid \gamma$  (und damit auch  $\nmid \varphi$ ) der Inkongruenz  $u \not\equiv v \pmod{3}$  genügen. Nach (4), (6), (7) drücken sich die zum Ausgang genommenen Lösungspaare  $a, b$  (von ihren entgegengesetzten abgesehen) wie folgt durch die Koordinaten  $u, v$  von  $\varphi$  als Parameter aus:

$$a = u^2 - v^2, b = 2uv + v^2 \text{ mit } (u, v) = 1, u \not\equiv v \pmod{3}, \quad (8)$$

und wie man leicht bestätigt, wird das zugehörige

$$c = u^2 + uv + v^2.$$

Umgekehrt liefert, wie leicht zu sehen, jedes derartige Paar  $u, v$  eine primitive Lösung  $a, b, c$  der Ausgangsgleichung (1). Auch diese weniger bekannte Parameterdarstellung findet sich bereits in der Literatur<sup>2)</sup>.

4. Wegen der Invarianz der Parameterdarstellung (8) bei gleichzeitiger Vorzeichenumkehr der Parameter  $u, v$  kann man sich auf etwa  $v > 0$  beschränken. Zur Gewinnung einer Übersicht über die Lösungspaare  $a, b$  ersetzt man zweckmässig den Parameter  $u$  durch die Differenz  $d = u - v$ .

Die Parameterdarstellung (8) wird dann

$$\left. \begin{aligned} a &= 2dv + d^2 = d(d + 2v) \\ b &= 2dv + 3v^2 = v(2d + 3v) \end{aligned} \right\} \text{ mit } (d, v) = 1, d \not\equiv 0 \pmod{3}. \quad (9)$$

Für  $d > 0$  sind dann auch  $a, b > 0$ , so dass Lösungspaare  $a, b$  vom Plustyp resultieren.

Für  $d < 0$  hingegen hat man

$$\begin{aligned} ab &< 0 \text{ für } -d < \frac{3}{2}v \text{ oder } 2v < -d, \\ ab &> 0 \text{ für } \frac{3}{2}v < -d < 2v, \end{aligned}$$

---

<sup>2)</sup> Siehe dazu Dickson, History of the Theory of Numbers II, S. 405, New York 1966.

so dass neben Lösungspaaren vom Minustyp auch nochmals solche vom Plustyp resultieren. Man kann aber ohne Verlust auf die so resultierenden negativen Lösungspaare vom Plustyp verzichten, weil deren entgegengesetzte, positive Lösungspaare  $-a, -b$ , oder vielmehr ihre vertauschten  $-b, -a$ , bereits unter den zuvor mit  $d > 0$  gewonnenen Lösungspaaren vorkommen. Siehe dazu die Ausführungen über die Lösungsgesamtheit im Schlussabschnitt 6.

**5. Lösungen vom Plustyp.** Betrachte zunächst die beiden kleinsten Werte der Parameterdifferenz  $d$ . Die Parameterdarstellung (9) lautet für sie:

$$\begin{array}{ll} d=1 & d=2 \\ \left\{ \begin{array}{l} a=2v+1 \\ b=2v+3v^2 \end{array} \right\} & \text{mit } v > 0 \text{ beliebig, } \left\{ \begin{array}{l} a=4v+4 \\ b=4v+3v^2 \end{array} \right\} \text{ mit } v > 0 \text{ ungerade.} \end{array}$$

Für  $d=1$  ist die kleinere Lösungszahl  $a$  ungerade und durchläuft alle ungeraden natürlichen Zahlen ausser 1.

Für  $d=2$  ist die eine Lösungszahl  $a$  durch 8 teilbar – es ist das vom Fall  $v=1$  abgesehen die kleinere Lösungszahl –, und sie durchläuft alle durch 8 teilbaren natürlichen Zahlen, während die andere Lösungszahl  $b$  ungerade ist.

Allgemein erkennt man aus den Parameterformeln (9) leicht, dass nur ungerade oder durch 8 teilbare Lösungszahlen auftreten.

**6. Übersicht über alle Lösungen.** Durch wiederholte Anwendung der Substitution  $\varphi \rightarrow \rho\varphi$ , also

$$u + v\rho \rightarrow u\rho + v(\rho - 1) = -v + (u + v)\rho,$$

in Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

erhält man aus jedem Parameterpaar  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  ein Sextupel solcher Paare

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -v \\ u+v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(u+v) \\ u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ -(u+v) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u+v \\ -u \end{pmatrix},$$

und damit ein Tripel von Lösungspaaren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(a+b) \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -(a+b) \end{pmatrix} \quad (10)$$

mit der Quersumme  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Durch Übergang zum Konjugiert-komplexen  $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ , also  $\gamma \rightarrow \bar{\gamma}$ , und somit

$$a + b\rho \rightarrow a - b\rho^2 \rightarrow (a + b) - b\rho$$

erhält man dazu das Tripel

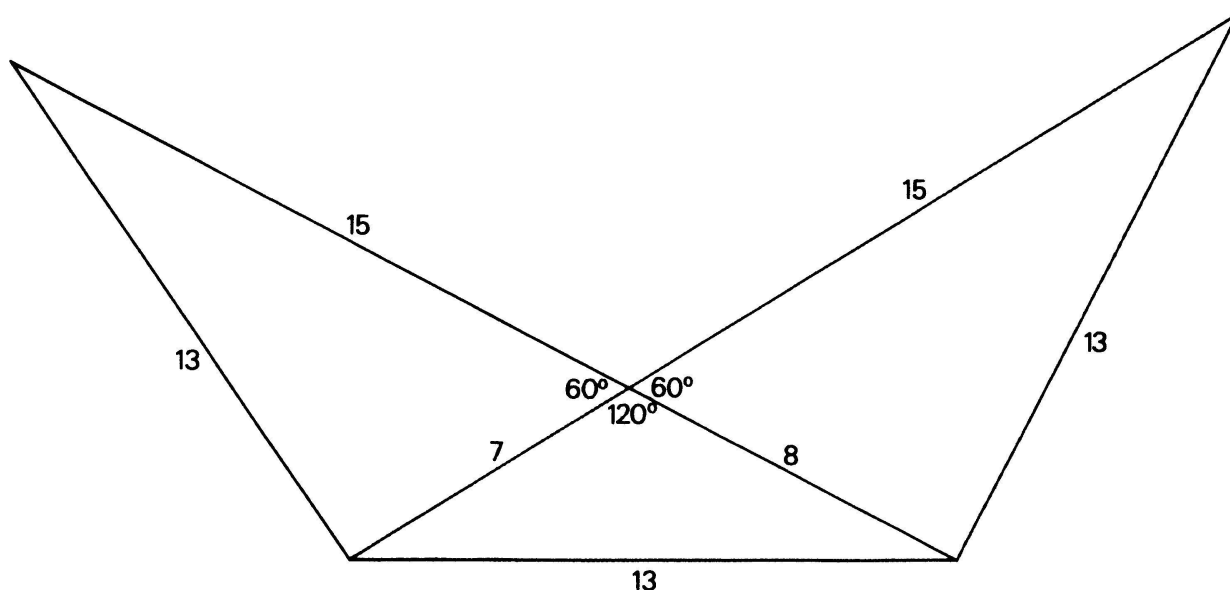
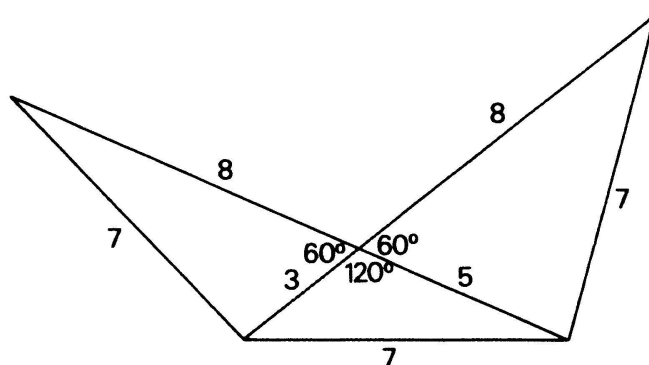
$$\begin{pmatrix} a+b \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ a+b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix}. \quad (10')$$

Als einfachstes Beispiel seien die beiden kleinsten solchen Tripelpaare ( $d=1, 2$  mit  $v=1$  entsprechend) angeführt<sup>3)</sup>:

3	-8	5	7	-15	8
5	3	-8	8	7	-15
8	-3	-5	15	-7	-8
-5	8	-3	-8	15	-3

In jedem solchen Dreieckstripel (10), (10') gibt es, wie aus der Quersumme  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

leicht ersichtlich, genau ein positives Lösungspaar mit seinem entgegengesetzten vertauschten, beide vom Plustyp, während die beiden anderen Lösungspaare vom



<sup>3)</sup> Siehe dazu auch die nachstehenden Figuren der zugehörigen Dreieckstripel.

Minustyp sind. Aus der im vorhergehenden Abschnitt 5 gewonnenen Übersicht über die arithmetische Natur der Lösungspaare vom Plustyp ist hiermit auch eine solche für die begleitenden Lösungspaare vom Minustyp gewonnen. *Auch in ihnen treten nur alle ungeraden natürlichen Zahlen ausser 1 und alle natürlichen Vielfachen von 8 auf.*

Die damit gewonnene Übersicht über die Lösungen der zugrundegelegten diophantischen Gleichung (1) kann auch auf mannigfache Weise durch elementararithmetische Betrachtungen innerhalb des rationalen Zahlkörpers gewonnen werden. Doch scheint mir, wie schon gesagt, die hier durchgeführte Heranziehung der eindeutigen Primzerlegung im Körper der sechsten Einheitswurzeln interessanter und eleganter.

Helmut Hasse, Hamburg

## Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten

### II. Teil

Als zweiter Zugang zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten soll hier eine in der ebenen Kinematik auftretende birationale quadratische Transformation verwendet werden<sup>1)</sup>.

Der erste Momentanpol  $P_1$  eines ebenen Zwangslaufes liege im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Die Polbahntangente falle mit der  $x$ -Achse zusammen, und der zweite, auf der  $y$ -Achse liegende Momentanpol  $P_2$  – auch Wendepol genannt – habe die Koordinaten  $P_2(0, -2\rho)$ . Dann lautet die Gleichung des Wendekreises  $w$  im Bezugsmoment der Bewegung

$$x^2 + y^2 + 2\rho y = 0. \quad (1)$$

Alle von  $P_1$  verschiedenen Punkte der Gangebene  $\Gamma$ , die sich mit dem Wendekreis decken, und nur diese, durchlaufen im Augenblick der Bewegung Wendepunkte ihrer Bahnkurve. Ein beliebiger Punkt  $X(x, y)$  ist mit dem zugehörigen Krümmungsmittelpunkt  $\mathcal{X}(\xi, \eta)$  durch eine birationale quadratische Verwandtschaft  $T$  verknüpft. Die Transformationsformeln für  $T$  lauten bezüglich des vorgegebenen Koordinatensystems

$$\xi = \frac{2\rho xy}{x^2 + y^2 + 2\rho y}, \quad \eta = \frac{2\rho y^2}{x^2 + y^2 + 2\rho y}. \quad (2)$$

---

<sup>1)</sup> Im ersten Teil dieses Beitrages wurde eine von K.H. Schellbach eingeführte Konstruktion der Krümmungsmitte zur Untersuchung eines hyperoskulierenden Kegelschnittbüschels ausgewertet [5].