**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 31 (1976)
**Heft:** 6

**Artikel:** "Kreisel"
**Autor:** Wolff, Gerhard
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-31405

$$=\lim_x\inf \frac{A(k)(x+1)}{2^k x+1} = \frac{A(k)}{2^k} < \infty .$$

It may be remarked that the inequality

$$\lim_n\inf \frac{1}{n}\sigma^{(3)}(n) < \infty$$

follows also from the conjecture that there are infinitely many Mersenne primes. Indeed, if $2^p-1$ is a prime number, then

$$\sigma^{(3)}(2^{p-1}) = \sigma(2^p) = 2^{p+1}-1$$

and

$$\frac{1}{2^{p-1}}\sigma^{(3)}(2^{p-1}) = 4 - \frac{1}{2^{p-1}} .$$

Therefore

$$\lim_n\inf \frac{1}{n}\sigma^{(3)}(n) \leqslant \lim_p\inf \frac{1}{2^{p-1}}\sigma^{(3)}(2^{p-1}) = 4 .$$

A. Mąkowski, Institute of Mathematics, University of Warsaw

REFERENCES

[1] A. MĄKOWSKI and A. SCHINZEL, *On the functions $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$*, Colloq. Math. *13*, p. 95–99 (1964).

[2] A. SCHINZEL, *Ungelöste Probleme*, Nr.30, Elem. Math. *14*, p. 60–61 (1959).

[3] A. SCHINZEL et W. SIERPIŃSKI, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arith. *4*, p. 185–208 (1958); corrigendum ibid. *5*, p. 259 (1959).

# Elementarmathematik und Didaktik

## «Kreisel»

### 1. Einleitung

Diese Arbeit will ein Axiomensystem für die affine Geometrie propagieren, das meines Erachtens wegen seiner Einfachheit für den Geometrieunterricht an Gymnasien geeignet ist. Es stammt von Werner Bos, der auch den Namen «Kreisel» für seine Modelle vorgeschlagen hat. Einige seiner charakteristischen Züge sind:

1. Die Strukturdaten eines Kreisels (über dem reellen Zahlkörper) lassen sich leicht veranschaulichen.

2. Alle affin-geometrischen Begriffe besitzen eine natürliche «kreiseltheoretische» Erklärung. Entsprechendes gilt für metrische Begriffe, wenn zusätzlich ein Skalarprodukt gegeben ist.
3. Das formale Rechnen in Kreiseln ist nicht schwieriger als in Vektorräumen.

## 2. Kreisel und R-Kreisel

**2.1 Definition.** Es sei $A$ eine Menge. Eine *Kreiseladdition* auf $A$ ist eine Abbildung

$$+ : A \times A \times A \to A, (x,p,y) \mapsto x \underset{p}{+} y,$$

mit den Eigenschaften:

$$K_1 \quad x \underset{p}{+} p = x, \qquad K_3 \quad (x \underset{p}{+} y) \underset{p}{+} z = x \underset{p}{+} (y \underset{p}{+} z),$$

$$K_2 \quad x \underset{p}{+} y = y \underset{p}{+} x, \qquad K_4 \quad x \underset{p}{+} y = (x \underset{q}{+} y) \underset{p}{+} q.$$

Ein *Kreisel* ist ein Paar $(A, +)$, bestehend aus einer Menge $A$ und einer Kreiseladdition $+$ auf $A$.

**2.2 Beispiel.** Im Anschauungsraum erhält man eine Kreiseladdition auf vertraute Weise: Für jedes Punktetripel $(x,p,y)$ sei $x \underset{p}{+} y$ derjenige Punkt, für welchen das Quadrupel $(x,p,y, x \underset{p}{+} y)$ ein Parallelogramm bildet. Dann sind $K_1$ bis $K_3$ geläufige Aussagen über die Addition von Punkten bezüglich eines fest gewählten Bezugspunktes («Ursprungs») $p$. Die Gültigkeit von $K_4$ führe sich der Leser an Hand einer Figur selbst vor Augen!

**2.3** Als einfache Konsequenz der obigen Definition notieren wir das

**Lemma.** Es sei $(A, +)$ ein Kreisel. Für jedes $p \in A$ bezeichne $\underset{p}{+} : A \times A \to A$, $(x,y) \mapsto x \underset{p}{+} y$, die induzierte 2stellige Operation auf $A$. Dann ist $(A, \underset{p}{+})$ eine abelsche Gruppe: Zu $x \in A$ ist $p \underset{x}{+} p$ invers (bzgl. $\underset{p}{+}$), $p \underset{x}{+} p =: \underset{p}{-} x$. Ferner gilt allgemein:

$$(*) \; x \underset{p}{+} y = x \underset{q}{-} p \underset{q}{+} y \; (= x \underset{q}{+} (\underset{q}{-} p) \underset{q}{+} y).$$

**Bemerkung.** Ein wichtiger Aspekt von $(*)$ ist: Jede «Wechselsumme» der Form $x_1 \underset{q}{-} x_2 \underset{q}{+} x_3$ ist vom Bezugspunkt $q$ unabhängig. Dies rechtfertigt die bezugspunktfreie Schreibweise $x_1 - x_2 + x_3$.

**2.4** Wie üblich bezeichne **R** den Körper der reellen Zahlen.

**Definition.** Es sei $(A,+)$ ein Kreisel. Eine **R**-*Operation* auf $(A,+)$ ist eine Abbildung

$$\cdot : \mathbf{R}\times A\times A\to A\,,\ (\lambda,p,x)\mapsto \lambda\underset{p}{\cdot}x\,,$$

mit den Eigenschaften:

$M_1$ $\quad 1\underset{p}{\cdot}x=x,$

$M_2$ $\quad (\lambda\cdot\mu)\underset{p}{\cdot}x=\lambda\underset{p}{\cdot}(\mu\underset{p}{\cdot}x),$

$M_3$ $\quad (\lambda+\mu)\underset{p}{\cdot}x=\lambda\underset{p}{\cdot}x\underset{p}{+}\mu\underset{p}{\cdot}x,$

$M_4$ $\quad \lambda\underset{p}{\cdot}(x\underset{p}{+}y)=\lambda\underset{p}{\cdot}x\underset{p}{+}\lambda\underset{p}{\cdot}y,$

$M_5$ $\quad \lambda\underset{p}{\cdot}x=\lambda\underset{q}{\cdot}x\underset{q}{+}\lambda\underset{p}{\cdot}q.$

Ein **R**-*Kreisel* (reeller Kreisel, Kreisel über **R**) ist ein Kreisel zusammen mit einer **R**-Operation.

Es bedarf wohl keiner Erklärung, wie sich der Anschauungsraum als **R**-Kreisel auffassen lässt. Der Leser sollte sich lediglich $M_5$ durch eine Figur verdeutlichen.

**2.5 Lemma.** Gegeben seien eine Menge $A$ und Abbildungen $+ : A\times A\times A\to A$, $\cdot : \mathbf{R}\times A\times A\to A$. Dann sind gleichwertige Aussagen:

1. $(A,+,\cdot)$ ist ein **R**-Kreisel.
2. a) Für jedes $p\in A$ ist $(A,\underset{p}{+},\underset{p}{\cdot})$ ein **R**-Vektorraum; dabei ist

   $\underset{p}{+}(x,y):=x\underset{p}{+}y,\ \underset{p}{\cdot}(\lambda,x):=\lambda\underset{p}{\cdot}x$ für $p,x,y\in A$ und $\lambda\in\mathbf{R}$.

   b) Es gelten die «Umrechnungsregeln»

   $(*)\ x\underset{p}{+}y=x\underset{q}{-}p\underset{q}{+}y,\qquad (**)\ \lambda\underset{p}{\cdot}x=\lambda\underset{q}{\cdot}x\underset{q}{+}(1-\lambda)\underset{q}{\cdot}p.$

   Der Beweis ist nicht schwierig.

**2.6** Ein zentraler Begriff der Kreiseltheorie ist der einer *baryzentrischen Kombination* von Punkten $x_1,x_2,\ldots,x_n$ eines **R**-Kreisels $(A,+,\cdot)$: Sind $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbf{R}$ und $p\in A$, dann heisst die Linearkombination $\lambda_1\underset{p}{\cdot}x_1\underset{p}{+}\cdots\underset{p}{+}\lambda_n\underset{p}{\cdot}x_n$ baryzentrisch, falls $\sum\limits_1^n\lambda_i=1$ ist. Man kann zeigen, dass solche baryzentrischen Kombinationen unabhängig vom Bezugspunkt sind:

$$\lambda_1\underset{p}{\cdot}x_1\underset{p}{+}\cdots\underset{p}{+}\lambda_n\underset{p}{\cdot}x_n=\lambda_1\underset{q}{\cdot}x_1\underset{q}{+}\cdots\underset{q}{+}\lambda_n\underset{q}{\cdot}x_n.$$

Damit sind bezugspunktfreie Ausdrücke der Form $\sum\limits_1^n\lambda_i\cdot x_i\ (\sum\limits_1^n\lambda_i=1)$ sinnvoll.

**2.7** Wegen der Bedeutung metrischer Begriffe erklären wir noch in aller Kürze Skalarprodukte auf reellen Kreiseln.

**Definition.** Ein *Skalarprodukt* auf dem **R**-Kreisel $(A,+,\cdot)$ ist eine Abbildung

$$':A\times A\times A\to\mathbf{R},(x,p,y)\mapsto x\underset{p}{'}y,$$

mit den Eigenschaften:

$S_1$ Für jedes $p\in A$ ist Abbildung $\underset{p}{'}:A\times A\to\mathbf{R}$, $\underset{p}{'}(x,y):=x\underset{p}{'}y$, ein Skalarprodukt auf dem **R**-Vektorraum $(A,\underset{p}{+},\underset{p}{\cdot})$, s. 2.5.

$S_2$ (Translationsinvarianz:) $x\underset{p}{'}y=(x\underset{p}{+}q)\underset{q}{'}(y\underset{p}{+}q)$.

Ein *euklidischer Kreisel* besteht aus einem **R**-Kreisel zusammen mit einem Skalarprodukt.

## 3. Grundbegriffe der Elementargeometrie

**3.1** Es sollen jetzt beispielhaft einige der wichtigsten elementargeometrischen Begriffe kreiseltheoretisch definiert werden. Dazu seien **R**-Kreisel $\mathfrak{A}=(A,+,\cdot)$ und $\mathfrak{B}=(B,+,\cdot)$ gegeben. Eine Mengenabbildung $f:A\to B$ heisst affin (eine **R**-Kreiselabbildung), wenn sie die Strukturdaten respektiert:

$$f(x\underset{p}{+}y)=fx\underset{fp}{+}fy;\qquad f(\lambda\underset{p}{\cdot}x)=\lambda\underset{fp}{\cdot}fx.$$

Hat man noch Skalarprodukte auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so heisst $f$ euklidisch, wenn überdies $x\underset{p}{'}y=fx\underset{fp}{'}fy$ gilt. Als Beispiel für eine **R**-Kreiselabbildung nennen wir die zu einem Punktepaar $(p,q)$ gehörige Translation $t_q^p:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}$, $t_q^p(x):=x\underset{p}{+}q$.

Für verschiedene Punkte $p_0,p_1$ von $\mathfrak{A}$ sei

$$\langle p_0,p_1\rangle:=\mathbf{R}\underset{p_0}{\cdot}p_1\underset{(**)}{=}\{\sum_0^1\lambda_i\cdot p_i\,|\,\lambda_i\in\mathbf{R},\lambda_1+\lambda_2=1\}$$

ihre Verbindungsgerade; für nicht-kollineare Punkte $p_0,p_1,p_2$ sei

$$\langle p_0,p_1,p_2\rangle:=\langle p_0,p_1\rangle\underset{p_0}{+}\langle p_0,p_2\rangle=\{\sum_0^2\lambda_i\cdot p_i\,|\,\lambda_i\in\mathbf{R},\sum_0^2\lambda_i=1\}$$

ihre Verbindungsebene; Geraden und Ebenen sind stabile Teilmengen in $\mathfrak{A}$ und erben damit eine Unterstruktur. Die zu einem Skalarprodukt $'$ auf $\mathfrak{A}$ gehörige Metrik wird durch $d(p,q):=\sqrt{q\underset{p}{'}q}$ erklärt. Ferner hat man eine 3stellige (!) Orthogonalitätsrelation für Punkte in $\mathfrak{A}:x\underset{p}{\perp}y:\Leftrightarrow x\underset{p}{'}y=0$; sie bestimmt eine Orthogonalitätsbeziehung für Geradenpaare.

**3.2** Leider müssen wir wegen der gebotenen Kürze darauf verzichten, die Tauglichkeit der Bosschen Axiomatik überzeugend zu demonstrieren. Als «Kostprobe» einer einfachen Rechnung zeigen wir lediglich:

Ist $(p_1, p_2, p_3, p_4)$ ein beliebiges Quadrupel (Viereck) in $\mathfrak{A}$, so ist das Quadrupel $(s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{41})$ der sukzessiven Mittelpunkte ein Parallelogramm, d. h. $s_{12} \underset{s_{23}}{+} s_{34} = s_{41}$.

$$s_{12} \underset{s_{23}}{+} s_{34} = s_{12} - s_{23} + s_{34} = \frac{1}{2} \underset{p_1}{\cdot} p_2 - \frac{1}{2} \underset{p_2}{\cdot} p_3 + \frac{1}{2} \underset{p_3}{\cdot} p_4 = \left(\frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_2\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2} \cdot p_2 + \frac{1}{2} \cdot p_3\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot p_3 + \frac{1}{2} \cdot p_4\right) = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{2} \cdot p_4 = s_{41}.$$

## 4. Schlussbemerkungen

J. Dieudonné hat vorgeschlagen, die Geometrie der Sekundarstufe II völlig innerhalb der Theorie der reellen Vektorräume abzuhandeln, s. speziell die Einleitung seines Buches: Algèbre linéaire et géométrie élémentaire. Die Vorteile eines solchen Vorgehens sind unbestritten. Als Nachteil muss freilich angesehen werden, dass einige zentrale Begriffe unter strukturtheoretischen Gesichtspunkten keinen befriedigenden Platz einnehmen; zum Beispiel erbt ein affiner Teilraum ohne den Nullvektor keine Struktur, und eine affine Abbildung ist lediglich das Kompositum einer strukturtreuen (linearen) Abbildung mit einer «strukturuntreuen» Translation. Der Grund dafür ist kurz gesagt die strukturimmanente Sonderrolle des Nullvektors. Der «klassische» Ausweg aus diesem Dilemma ist wohlbekannt: Den Gegenstand der affinen (euklidischen) Geometrie bilden nicht die reellen (euklidischen) Vektorräume, sondern die Mengen, auf denen jene fixpunktfrei und transitiv operieren. Dieser Ansatz bringt nun aber zweifellos didaktische Probleme: Man rechnet z. B. stets mit Punkten und Vektoren.

Das Bossche Axiomensystem kennt die genannten Nachteile nicht! Welche anderen treten an ihre Stelle? Man wird wohl in erster Linie einwenden, der Kalkül sei unpraktisch, da alle Operationen grundsätzlich die Angabe eines Bezugspunktes erfordern. Hierzu ist zu sagen, dass schon die ersten Ergebnisse der Theorie Abhilfe bringen: Alle Terme einer kreiseltheoretischen Aussage lassen sich so umformen, dass nur ein und derselbe Bezugspunkt auftritt, s. 2.5; diesen kann man aber nach Übereinkunft ($+ \leftrightarrow \underset{p}{+}$, usw.) unterdrücken. Oder man schreibt Summen und Produkte als baryzentrische Kombinationen, was zumindest typographische Vorteile hat, s. 3.2.

Ein wichtiger Aspekt der Bosschen Axiomatik ist bisher noch nicht ausdrücklich erwähnt worden: **R**-Kreisel sind gleichungsdefinierte Algebren. Ich meine, dass schon eine bruchstückhafte Entwicklung der Kreiseltheorie, die natürlich in sehr engem Zusammenhang zur Vektorraumtheorie steht, sich gut dazu eignet, typische Begriffe der strukturellen Mathematik den Schülern nahezubringen, ein Anliegen, das heutzutage wohl mehrheitlich geteilt wird.

Gerhard Wolff, Universität Konstanz