Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 31 (1976)
Heft: 6

Artikel: Über gewisse n-komponierbare Graphen
Autor: Bergmann, Horst
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31404

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

genügen, gibt es ein dreidimensionales konvexes Polyeder mit lauter 3wertigen Ecken, das jeweils f_i konvexe i-Ecke als Seitenflächen besitzt. Nun ist es bezüglich jeder Seitenfläche möglich, ein Schlegel-Diagramm des Polyeders zu zeichnen. Ein Schlegel-Diagramm stellt eine Zerlegung eines konvexen Polygons P in konvexe Polygone P_j dar. Aus dem Theorem von Eberhard folgt also:

Es seien f_i $(i \geq 3,\ i \neq 6)$ nicht-negative ganze Zahlen, die der Gleichung (20) genügen, und f_j sei ein nicht-verschwindendes dieser f_i. Dann gibt es dazu ein konvexes j-Eck P, das in konvexe Polygone so zerlegt werden kann, dass die Anzahl der i-Ecke $(i \neq j)$ f_i ist; die Anzahl der j-Ecke ist $f_j - 1$. Dabei sind alle Ecken 3wertig.

Gerd Blind, Universität Stuttgart

LITERATURVERZEICHNIS

[1] V. EBERHARD, *Zur Morphologie der Polyeder* (Leipzig 1891).
[2] B. GRÜNBAUM, *Some Analogues of Eberhard's Theorem on Convex Polytopes,* Israel J. Math. *6,* 398–411 (1968).
[3] S. JENDROĽ and E. JUCOVIČ, *On a Conjecture by B. Grünbaum,* Discrete Mathematics *2,* 35–49 (1972).

Über gewisse n-komponierbare Graphen

Im folgenden sei mit Γ stets ein endlicher, schlichter und zusammenhängender Graph[1]) bezeichnet, welcher mindestens eine Kante enthält.

Es werde der Begriff des Kompositionsgrades[2]) eines Graphen eingeführt, welcher sich auf die «Zusammensetzung» eines Graphen aus besonders «einfachen» Graphen bezieht.

Unter dem *Kompositionsgrad* $c(\Gamma)$ eines Graphen Γ sei die kleinste unter den natürlichen Zahlen z verstanden, für welche Γ eine Darstellung

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{z} B_i$$

als Vereinigung von geeigneten Bäumen $B_i \subseteq \Gamma$ besitzt. Ein *n-komponierbarer Graph* sei ein Graph Γ mit $c(\Gamma) = n$.

Für jeden Graphen Γ besteht nun die Abschätzung

$$a_1(\Gamma) \leqq c(\Gamma)\,(a_0(\Gamma) - 1), \tag{1}$$

wobei mit $a_0(\Gamma)$ bzw. $a_1(\Gamma)$ die Anzahl der Knotenpunkte bzw. Kanten von Γ

[1]) Die Definitionen aller in der vorliegenden Note verwendeten und nicht näher definierten graphentheoretischen Begriffe findet man bei K. WAGNER [1].

[2]) Man vergleiche dazu auch [3] und [4].

bezeichnet sei. Der Beweis von (1) folgt unmittelbar aus dem bekannten Sachverhalt, dass für jeden Baum B die Beziehung $a_1(B)=a_0(B)-1$ gilt.

Es stellt sich die Frage nach den Graphen Γ, für welche in (1) das Gleichheitszeichen besteht.

Unter einem *primitiven n-komponierbaren Graphen* sei ein n-komponierbarer Graph Γ mit $a_1(\Gamma)=n(a_0(\Gamma)-1)$ verstanden. Ein primitiver n-komponierbarer Graph Γ ist danach ein Graph, welcher eine Darstellung als Vereinigung von n paarweise kantendisjunkten Gerüsten besitzt.

Die Frage nach den primitiven n-komponierbaren Graphen[3]) wird besonders interessant, wenn man sie auf die regulären Graphen einschränkt:

Welches sind die regulären primitiven n-komponierbaren Graphen Γ?

Diese Frage soll nachstehend untersucht werden. Man benötigt dazu den

Hilfssatz. *Der vollständige Graph V_{2n} mit $2n$ Knotenpunkten ist ein primitiver n-komponierbarer Graph.*

Der *Beweis* des Hilfssatzes soll durch vollständige Induktion nach n erbracht werden. Für $n=1$ trifft der Hilfssatz offensichtlich zu. Weiter sei bereits bewiesen, dass der vollständige Graph $V_{2m}(m\geqq 1)$ ein primitiver m-komponierbarer Graph ist. Daraus folgt, dass man die Kanten von V_{2m} derart mit m Farben $\bar{1}, \ldots, \bar{m}$ färben kann, dass die Menge der gleichgefärbten Kanten jeweils ein Gerüst von V_{2m} bildet.

Es sei jetzt V_{2m} ein vollständiger Graph, dessen Kanten mit m Farben $\bar{1}, \ldots, \bar{m}$ so gefärbt sind, dass die gleichgefärbten Kanten jeweils ein Gerüst von V_{2m} bilden. Man zerlege die Menge der Knotenpunkte von V_{2m} irgendwie in zwei Klassen von Knotenpunkten $a_1, \ldots, a_m$ und $b_1, \ldots, b_m$. Fügt man zu den vollständigen Graphen V_{2m} eine neue Kante (c_1, c_2) mit $c_1, c_2 \notin V_{2m}$ hinzu und verbindet sowohl c_1 als auch c_2 mit allen Knotenpunkten von V_{2m} jeweils durch eine Kante, so erhält man den vollständigen Graphen V_{2m+2}.

Die noch nicht gefärbten Kanten von V_{2m+2} werden jetzt wie folgt gefärbt:

1. Man färbe die Kante (c_1, c_2) mit der Farbe $\overline{m+1}$.
2. Man färbe die Kantenpaare (c_1, b_i), (c_2, a_i) $(i=1, \ldots, m)$ sämtlich mit der Farbe $\overline{m+1}$.
3. Man färbe die Kantenpaare (c_1, a_i), (c_2, b_i) $(i=1, \ldots, m)$ jeweils mit der Farbe $\bar{i}$.

Damit sind die Kanten von V_{2m+2} mit $m+1$ Farben derart gefärbt, dass die gleichgefärbten Kanten jeweils ein Gerüst von V_{2m+2} bilden.

Für den Kompositionsgrad von V_{2m+2} folgt daraus $c(V_{2m+2})\leqq m+1$. Angenommen, es gilt $c(V_{2m+2})\leqq m$. Dann erhält man aber wegen $a_0(V_{2m+2})=2m+2$ und $a_1(V_{2m+2})=(m+1)(2m+1)$ aus (1) den Widerspruch $(m+1)(2m+1)\leqq m(2m+1)$. Man hat also $c(V_{2m+2})=m+1$.

Aus $c(V_{2m+2})=m+1$ und der eben nachgewiesenen Färbungsmöglichkeit der Kanten von V_{2m+2} folgt, dass V_{2m+2} ein primitiver $(m+1)$-komponierbarer Graph ist. Damit ist der Hilfssatz durch vollständige Induktion bewiesen.

Unter Heranziehung des Hilfssatzes soll jetzt gezeigt werden:

---

[3]) Zu diesem Thema «Graphen mit vorgegebenen Gerüste-Eigenschaften» vergleiche man auch [2].

Satz über reguläre primitive n-komponierbare Graphen. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es nur genau einen regulären primitiven n-komponierbaren Graphen Γ, nämlich den vollständigen Graphen V_{2n} mit $2n$ Knotenpunkten.*

Beweis. Für $n=1$ trifft die Aussage sicher zu. Ein 1-komponierbarer Graph Γ ist nämlich notwendig isomorph mit einem Baum B. Und da jeder Baum B mindestens zwei Knotenpunkte a vom Grade $\gamma(a,B)=1$ enthält, gibt es unter allen Bäumen nur genau einen regulären Graphen, nämlich den aus einer Kante bestehenden Graphen $k=V_2$.

Es sei jetzt Γ ein primitiver n-komponierbarer Graph regulär vom Grade r und $n>1$. Für Γ gilt dann $2a_1(\Gamma)=ra_0(\Gamma)$ und $a_1(\Gamma)=n(a_0(\Gamma)-1)$, woraus man die Beziehung

$$2n=a_0(\Gamma)(2n-r) \tag{2}$$

gewinnt.

Aus (2) folgt $a_0(\Gamma)\leqq 2n$. Angenommen, es gilt $a_0(\Gamma)\leqq 2n-2$. Dann ist $c(\Gamma)\leqq c(V_{2n-2})$. Aus dem Hilfssatz folgt aber $c(V_{2n-2})\leqq n-1$, so dass sich der Widerspruch $c(\Gamma)\leqq n-1$ ergibt.

Man hat also $a_0(\Gamma)=2n-1$ oder $2n$. Aus $a_0(\Gamma)=2n-1$ und (2) folgt, dass $2n-1$ ein Teiler von $2n$ ist. Wegen $n>1$ ist das aber ein Widerspruch. Man erhält damit schliesslich $a_0(\Gamma)=2n$, woraus sich auf Grund von (2) für r die Beziehung $r=2n-1$ ergibt. Ein Graph Γ mit $2n$ Knotenpunkten regulär vom Grade $r=2n-1$ ist aber notwendig isomorph mit dem vollständigen Graphen V_{2n}.

Damit ist jetzt bewiesen: Falls es einen regulären primitiven n-komponierbaren Graphen Γ gibt, so muss Γ mit dem vollständigen Graphen V_{2n} isomorph sein. Aus dem Hilfssatz folgt aber, dass der vollständige Graph V_{2n} in der Tat ein regulärer primitiver n-komponierbarer Graph ist.

Es hat sich damit gezeigt:

Die vollständigen Graphen mit gerader Knotenpunktanzahl sind die einzigen unter den regulären Graphen Γ, welche eine Darstellung als Vereinigung von paarweise kantendisjunkten Gerüsten zulassen.

Horst Bergmann, Hamburg

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. Wagner, *Graphentheorie* (Mannheim 1970).

[2] L. Friess, *Graphen, worin je zwei Gerüste isomorph sind,* Math. Ann. *204,* 65–71 (1973).

[3] H. Bergmann, *Über die Darstellung planarer Graphen als Vereinigung von Bäumen,* Arch. Math. *26,* 332–336 (1975).

[4] H. Bergmann, *Ein Beitrag zur Theorie der endlichen n-komponierbaren Graphen,* Math. Nachr. *66,* 25–34 (1975).

Kleine Mitteilungen

Ein Gleichverteilungskriterium

Wir betrachten eine Folge von ganzen rationalen Zahlen $(\kappa_n), n=1,2,\ldots$ und eine natürliche Zahl $m\geq 2$. Die Folge (κ_n) heisst gleichverteilt mod m wenn für $h=0,1,\ldots,m-1$ die Limesbeziehung