Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 31 (1976)
Heft: 5

Artikel: Eine Bemerkung zu den vollkommenen Zahlen
Autor: Harborth, Heiko
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31402

Eine Bemerkung zu den vollkommenen Zahlen

Herrn Professor Dr. E. Trost zum 65. Geburtstag

Die Summe aller Teiler einer natürlichen Zahl n bezeichnet man mit $\sigma(n)$. Gilt $\sigma(n)=2n$, so heisst n eine vollkommene oder perfekte Zahl. Diese Zahlen sind enthalten in der allgemeineren Menge der sogenannten mehrfach vollkommenen Zahlen, bei denen nur $n \mid \sigma(n)$ gefordert wird. Bis 10000 haben ausser den sieben Zahlen

$$1, 6, 28, 120, 496, 672, 8128$$

keine weiteren diese Eigenschaft ([1]). Die Anzahl $V(x)$ aller solcher Zahlen $\leqq x$ wurde in [5] zu

$$V(x) \leqq x^{C/\log\log x}, \quad C = \text{konstant},$$

abgeschätzt. Ob es jedoch überhaupt unendlich viele Zahlen n mit $n \mid \sigma(n)$ gibt, ist bis heute unbekannt ([4], p. 173). Hier soll nun einmal an Stelle von $\sigma(n)$ mit $S(n)$ die Summe aller möglichen Summen aus verschiedenen Teilern von n betrachtet werden.

Satz 1. *Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n mit $n \mid S(n)$.*

Zum Beweis wird das folgende kombinatorische Ergebnis benutzt.

Hilfssatz. *Die Summe T aller möglichen Summen aus verschiedenen der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ergibt sich zu*

$$T = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) 2^{k-1}.$$

Es sei T_i die Summe aller Summen aus jeweils i der Zahlen a_j $(1 \leqq i, j \leqq k)$. Da a_j in genau $\binom{k-1}{i-1}$ Summen vorkommt, ergibt sich der Hilfssatz unmittelbar aus

$$T = \sum_{i=1}^{k} T_i = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} a_j = 2^{k-1} \sum_{j=1}^{k} a_j.$$

Zum Beweis von Satz 1 werden nun die k Zahlen a_j in dem Hilfssatz durch die $\tau(n)$ Teiler von n ersetzt, und es ergibt sich

$$S(n) = \sigma(n) 2^{\tau(n)-1}.$$

Man erkennt, dass aus $n \mid \sigma(n)$ immer $n \mid S(n)$ folgt. Für ungerades n gilt umgekehrt mit $n \mid S(n)$ auch $n \mid \sigma(n)$, so dass von den ungeraden Zahlen nur die mehrfach vollkommenen $n \mid S(n)$ erfüllen können. Es ist aber bis heute keine solche Zahl bekannt (ausser $n=1$).

Nun sei n gerade

$$n = r\,2^{a},\ r \equiv 1 \pmod 2,\ a \geqq 1\,.$$

Wegen der Multiplikativität von $\sigma(n)$, und weil $\tau(n) \geqq a+1$, gilt

$$n \mid S(n) \Leftrightarrow r \mid (2^{a+1}-1)\,\sigma(r)\,.$$

Alle Zweierpotenzen ($r=1$) erfüllen also $n \mid S(n)$, so dass Satz 1 damit schon bewiesen ist. Aber auch für alle Zahlen $n=2^{a}(2^{a+1}-1)$, $a=1,2,\ldots$, in deren Folge man alle geraden vollkommenen Zahlen findet, ist $n \mid S(n)$ richtig. Allgemein sind alle geraden Lösungen von $n \mid S(n)$ (und zusätzlich $n=2^0$) durch

$$n = r\,2^{hi-1};\ i=1,2,\ldots;\ h = \text{Ordnung von } 2 \left(\operatorname{mod} \frac{r}{d}\right);\ d = (r, \sigma(r))$$

charakterisiert. Unterhalb 10000 gibt es ausser den 14 Zweierpotenzen nur die Zahlen

6, 24, 28, 40, 96, 120, 224, 288, 360, 384, 496, 640, 672, 1536, 1792, 1920, 2016, 2176, 3744, 5632, 5760, 6144, 6528, 8128,

insgesamt also 38.

Eine Abschätzung nach unten soll noch angegeben werden.

Satz 2. *Für die Anzahl $A(x)$ aller natürlichen Zahlen $n \leqq x$ mit $n \mid S(n)$ gilt*

$$A(x) > \frac{\log\log x}{2 \log 2} \log x\,.$$

Es sei $U(x)$ die Anzahl der ungeraden $n \leqq x$ mit $n \mid S(n)$. Damit ergibt sich

$$A(x) = U(x) + \sum_{r \equiv 1(2)} \left[\frac{1}{h}\left(1 + \frac{\log x - \log r}{\log 2}\right)\right]$$

$$\geqq \frac{3 \log x}{2 \log 2} - 2 + \sum_{j=3}^{\infty} \left[\frac{\log x - \log j}{2j \log 2}\right]$$

$$\geqq \frac{3 \log x}{2 \log 2} - 2 + \sum_{j=3}^{\log\sqrt{x}} \left(\frac{\log x - \log j}{2j \log 2} - 1\right)$$

$$\geqq \frac{3 \log x}{2 \log 2} - 2 + \frac{\log x}{2 \log 2}\left(\log\log x - \log 6\right) - \frac{1}{4 \log 2} \left\{\left(\log\log x - \log 2\right)^2 - \right.$$

$$-\left(\log 2\right)^2\Big\} - \frac{1}{2}\log x + 2.$$

Letzteres ist für alle x grösser als in Satz 2 behauptet.

Eine vernünftige Abschätzung nach oben scheint sich nicht so einfach zu ergeben. Für $d=1$ kann man $O(\sqrt{x})$ erhalten, aber nach [2] oder [3] gilt $d=(r,\sigma(r))>1$ für fast alle r. Direkte Anwendung der Abschätzung aus [5] ergibt wohl nur $O(x)$.

Heiko Harborth, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Brother A. Brousseau, *Number Theory Tables* (San José, Calif. 1973).
[2] P. Erdös, *Über die Zahlen der Form $\sigma(n)$-n und n-$\varphi(n)$*. Elem. Math. *28*, 83–86 (1973).
[3] H.-J. Kanold, *Ein Satz über zahlentheoretische Funktionen,* Math. Nachr. *18*, 36–38 (1958).
[4] W. Sierpinski, *Elementary Theory of Numbers* (Warszawa 1964).
[5] E. Wirsing, *Bemerkung zu der Arbeit über vollkommene Zahlen,* Math. Ann. *137*, 316–318 (1959).

Kleine Mitteilungen

On Support Functions of Compact Convex Sets

The support function $h(K,.)$ of a compact convex set K in d-dimensional euclidean space E^d is defined by $h(K,u)=\sup\{<x,u>\mid x\in K\}$ for each $u\in E^d$, where $<.,.>$ denotes the ordinary inner product in E^d. A well known result in the basic theory of finite dimensional convexity is the following:

Theorem. *A positively (linear) homogeneous convex function h on E^d is the support function $h(K,.)$ of some compact convex set K.*

There are two proofs of this result in the literature, the first using directional derivatives of h (see, for example, [1], [2]), the second using polar cones (the sketch in [4]) or, equivalently, conjugate functions [3].

What is somewhat surprising is that there is a third proof, which more directly and intuitively makes use of the convexity of the function h. Indeed, perhaps the most curious feature of this proof is that it seems not to have been found earlier.

The new proof can be outlined very simply. If we write

$$H^-(u)=\{x\in E^d\mid <x,u>\leqslant h(u)\},\qquad H(u)=\{x\in E^d\mid <x,u>=h(u)\},$$

for each $u\in E^d$, then the set

$$K=\{x\in E^d\mid <x,u>\leqslant h(u) \text{ for all } u\in E^d\}=\bigcap\{H^-(u)\mid u\in E^d\}$$