eine Sequenz von $\mathbf{A}_{h_1}$ der Länge $g(n'')-1$, bei welcher keine Zahl zu n'' teilerfremd ist. Mit Berücksichtigung von (9) ist der Satz bewiesen. Als einfache Folgerung ergibt sich:

Sei $(a,d)=1$; $n=\prod_{\substack{p\leq N\\ p\nmid d}} p$. *Dann enthält die Sequenz* $a, a+d, \ldots, a+(g(n)-1)\,d$ *mindestens eine Zahl, welche nur Primteiler* $>N$ *besitzt. Diese Zahl der Gestalt* $a+vd$ *ist selbst Primzahl, wenn* $a<d$; $g(n)\,d\leqq(N+1)^2$ *erfüllt ist.*

Hans-Joachim Kanold, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. Jacobsthal, *Über Sequenzen ganzer Zahlen, von denen keine zu n teilerfremd ist, I–III*, Norske Vid. Selsk. Forhdl. *33*, 117–124, 125–131, 132–139 (1960).

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen zum Kontraktionsprinzip

1. Einleitung. Es ist der Zweck dieser Note, einen neuen Zugang zum Kontraktionsprinzip und zu anderen Sätzen über kontrahierende Abbildungen aufzuzeigen. Bei diesem Zugang ist eine «Grundformel» grundlegend, aus welcher alle anderen Aussagen leicht hergeleitet werden können.

2. Grundformel. (X,ρ) ist immer ein vollständiger metrischer Raum, T ist eine Abbildung von X in sich selbst. Die Abbildung T ist eine Kontraktion (oder kontrahierend), wenn

$$\rho(Tx,Ty)\leq a\rho(x,y) \text{ für } x,y\in X \tag{1}$$

gilt, wobei $0\leq a<1$ ist. Durch Induktion folgt für $n=1,2,\ldots$

$$\rho(T^n x, T^n y)\leq a^n\rho(x,y) \text{ für } x,y\in X. \tag{2}$$

Es sei $x,y\in X$. Aus der Dreiecksungleichung und aus (1) erhalten wir

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&\leq\rho(x,Tx)+\rho(Tx,Ty)+\rho(Ty,y)\\&\leq\rho(x,Tx)+a\rho(x,y)+\rho(y,Ty).\end{aligned}$$

Wenn der zweite Term auf der rechten Seite auf die linke Seite gebracht und die entstehende Ungleichung durch $1-a$ dividiert wird, ergibt sich unsere Grundformel

$$\rho(x,y)\leq\frac{1}{1-a}\{\rho(x,Tx)+\rho(y,Ty)\} \text{ für } x,y\in X. \tag{GF}$$

3. Das Kontraktionsprinzip. *Ist T eine Kontraktion, so besitzt T genau einen Fixpunkt x^*, und die Folge (x_n), wobei $x_0 \in X$ beliebig und $x_n := T^n x_0$ (oder, was gleichbedeutend ist, $x_{n+1} = Tx_n$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$) ist, konvergiert gegen x^* für $n \to \infty$.*

Dieser Satz ist das wohlbekannte Kontraktionsprinzip. Für den Beweis betrachten wir die oben definierte Folge (x_n). Die Grundformel liefert

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \frac{1}{1-a}\{\rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+p}, x_{n+p+1})\} \text{ für } n, p \in \mathbf{N}.$$

Wegen (2) ist $\rho(x_n, x_{n+1}) \leq a^n \rho(x_0, x_1)$, und daraus folgt

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq C(a^{n+p} + a^n) \text{ mit } C = \rho(x_1, x_0)/(1-a). \tag{3}$$

Diese Ungleichung zeigt, dass (x_n) eine Cauchyfolge ist. Ihr Grenzwert sei x^*. Lassen wir in (3) p gegen ∞ streben, so erhalten wir

$$\rho(x^*, x_n) \leq Ca^n \text{ für } n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Der Rest des Beweises wird in üblicher Weise durchgeführt. Mit (1) und (4) ergibt sich

$$\rho(Tx^*, x_{n+1}) \leq a\rho(x^*, x_n) \leq Ca^{n+1}.$$

Daraus folgt, dass (x_n) gegen $x^* = Tx^*$ konvergiert für $n \to \infty$. Die Eindeutigkeit des Fixpunktes wird leicht aus (1) oder (GF) hergeleitet.

4. Fehlerabschätzung. T sei eine Kontraktion mit dem Fixpunkt x^*. Aus der Grundformel erhalten wir mit $y = x^*$

$$\rho(x, x^*) \leq \frac{1}{1-a}\rho(x, Tx) \text{ für } x \in X. \tag{5}$$

Diese Ungleichung ist wichtig für numerische Abschätzungen. Sie besagt grob, dass $x \approx x^*$ ist, falls $x \approx Tx$ ist.

5. Stetige Abhängigkeit. T sei wieder eine Kontraktion mit dem Fixpunkt x^*, und S sei eine weitere Abbildung von X in sich selbst, welche den Fixpunkt y^* besitze. Dann liefert die Grundformel

$$\rho(x^*, y^*) \leq \frac{1}{1-a}\rho(Sy^*, Ty^*). \tag{6}$$

Diese Ungleichung zeigt, dass $x^* \approx y^*$ ist, falls $S \approx T$ ist. Sie kann z. B. benutzt werden, um die stetige Abhängigkeit der Fixpunkte x_λ einer Familie von Kontraktionen $\{T_\lambda\}$ vom Parameter λ nachzuweisen. Gilt nämlich $\sup\{\rho(T_\lambda x, T_\mu x) : x \in X\} \to 0$ für $\lambda \to \mu$, so folgt wegen (6) $x_\lambda \to x_\mu$ für $\lambda \to \mu$.

Wolfgang Walter, Universität Karlsruhe

Eigenvalues of Real Symmetric Matrices

Nearly every linear algebra book contains a proof that the characteristic roots of a real symmetric matrix A are real. The proofs use either a complex eigenvector of A or the compactness of the unit sphere to find a vector which maximizes the quadratic form $<x, Ax>$. The following is a new direct proof not using complex numbers or compactness, indeed not even using matrices.

Proposition. All characteristic roots of a symmetric operator on a real finite dimensional inner product space are real.

Proof. If A is symmetric and $p(x)=(x-a)^2+b$ is a factor of the minimal polynomial of A, there is a vector $v \neq 0$ such that $p(A)v=0$. Then $0 \leq <(A-aI)v, (A-aI)v> = <v, (A-aI)^2 v> = (-b)<v, v>$ so $b \leq 0$ and p has real roots. If w is an eigenvector for one of these roots the orthogonal complement of w is A-invariant and A restricted to it is symmetric. By induction on dimension the proof as well as the diagonalization of A is completed.

Note that the last two sentences of the proof are needed only to guarantee (without using complex eigenvectors) that all the irreducible factors of the characteristic polynomial are also factors of the minimal polynomial.

Ladnor Geissinger, University of North Carolina, USA

Aufgaben

Aufgabe 745. In einem ebenen Quadratgitter bezeichne A eine «Figur», d.h. eine nichtleere endliche Menge von Gitterquadraten, $n(A)$ deren Anzahl. Weiter sei $q^2(A)$ die Anzahl der Gitterquadrate in einem kleinsten, A enthaltenden achsenorientierten Quadrat im Gitter. Schliesslich setze man $d(A) := n(A)/q^2(A)$. Es wird nun eine Folge $A_0, A_1, \ldots, A_m, \ldots$ von Figuren wie folgt definiert: A_0 ist eine beliebige Ausgangsfigur; A_m entsteht aus A_{m-1}, indem man jedes Gitterquadrat hinzufügt, das mit einem solchen von A_{m-1} mindestens eine Gitterstrecke gemeinsam hat. Beweise, dass $d(A_m) \to 1/2\ (m \to \infty)$, unabhängig von A_0.

P. Wilker, Bern

1. Lösung. W^k sei ein Quadrat im Gitter mit der Seitenzahl k. Das Glied W_m^k der mit W^k beginnenden Folge besitzt $n(W_m^k)=2m(m-1)+4km+k^2$ Gitterquadrate und sein einhüllendes Quadrat hat deren $q^2(W_m^k)=(k+2m)^2$. Beides ist leicht einzusehen.

Sei nun A_0 eine beliebige Ausgangsfigur, W^1 ein Gitterquadrat innerhalb A_0 und W^k ein kleinstes, A_0 enthaltendes Quadrat im Gitter. Die aus diesen drei Figuren entstehenden Folgen sollen A_m, W_m^1, W_m^k lauten. Aus $W^1 \subseteq A_0 \subseteq W^k$ folgt, wie sofort ersichtlich, $W_m^1 \subseteq A_m \subseteq W_m^k$ und hieraus

$$n(W_m^1)=2m^2+2m+1 \leqslant n(A_m) \leqslant 2m^2+(4k-2)m+k^2=n(W_m^k).$$