

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 31 (1976)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Elementare Betrachtungen über arithmetische Folgen  
**Autor:** Kanold, Hans-Joachim  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31399>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 08.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

- [4] W. FENCHEL, *On Th. Bang's Solution of the Plank Problem*, Matematisk Tidsskrift B, 49–51 (1951).
- [5] A.W. ROBERTS und D.E. VARBERG, *Convex Functions*, Academic Press, New York, 1973.
- [6] R.T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [7] D.R. SMART, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, 1974.
- [8] A. TARSKI, *Uwagi o stopniu równowaznoscia wielokatow*, Parameter 2, 1932.
- [9] F.A. VALENTE, *Konvexe Mengen*, Bibl. Inst. Mannheim, Nr. 402/402a, 1968.

## Elementare Betrachtungen über arithmetische Folgen

Herrn Professor Dr. E. Trost zum 65. Geburtstage

Im folgenden bezeichnen kleine lateinische Buchstaben natürliche Zahlen. Wir betrachten Mengen der Gestalt

$$\mathbf{A} = \{a, a+d, a+2d, \dots\}. \quad (1)$$

Den g. g. T. der Zahlen  $a, d, n$  bezeichnen wir durch

$$(a, d, n) = h. \quad (2)$$

Aus  $h > 1$  folgt, dass alle Elemente von  $\mathbf{A}$  durch  $h$  teilbar sind und damit auch, dass kein Element von  $\mathbf{A}$  zu  $n$  teilerfremd ist. Wir setzen von nun an voraus:

$$h = 1, n > 1. \quad (3)$$

Wir führen jetzt die Funktion  $g(n)$  von E. Jacobsthal ein als Maximalabstand zweier aufeinanderfolgender zu  $n$  teilerfremder natürlicher Zahlen [1]. Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

**Satz.** *Jede Sequenz von  $\mathbf{A}$  der Länge  $g\left(\frac{n}{(d, n)}\right)$  enthält mindestens eine zu  $n$  teilerfremde Zahl; es gibt Sequenzen von  $\mathbf{A}$  der Länge  $g\left(\frac{n}{(d, n)}\right) - 1$ , welche keine zu  $n$  teilerfremde Zahl enthalten.*

*Beweis.* Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein.

$$\begin{aligned} (a, d) &= h_1; & a &= h_1 a'; & d &= h_1 d'; \\ (\dot{a}, n) &= h_2; & a &= h_2 a''; & n &= h_2 n'; \\ (d, n) &= h_3; & d &= h_3 d''; & n &= h_3 n''; \end{aligned} \quad (4)$$

Wegen (3) sind  $h_1, h_2, h_3$  paarweise teilerfremd, ausserdem gilt

$$(n, h_1) = 1. \quad (5)$$

Jedes Element von  $\mathbf{A}$  hat die Gestalt  $a + vd$  ( $v = 0, 1, 2, \dots$ ) und ist durch  $h_1$  teilbar. Wegen (5) dürfen wir statt  $\mathbf{A}$  die Menge

$$\mathbf{A}_{h_1} = \left\{ \frac{a}{h_1}, \frac{a}{h_1} + \frac{d}{h_1}, \frac{a}{h_1} + 2 \frac{d}{h_1}, \dots \right\} = \left\{ a', a' + d', a' + 2d', \dots \right\} \quad (6)$$

untersuchen. Wir können o. B. d. A. annehmen, dass  $n$  quadratfrei ist; nach (4) ist  $\frac{n}{h_3} = n$ ;  $\frac{d}{h_1} = d'$  und

$$(n'', d') = 1. \quad (7)$$

Die Zahlen  $0 \cdot n'', 1 \cdot n'', \dots, (d' - 1) n''$  durchlaufen ein vollständiges Restsystem  $(\bmod d')$ . Wir können daher  $v$  so wählen, dass

$$\begin{aligned} a' + vn'' &\equiv 0 \pmod{d'}; \\ a' + vd' &\equiv \frac{a' + vn''}{d'} d' + vd' \equiv \left( \frac{a' + vn''}{d'} + v \right) d' \pmod{n''} \end{aligned} \quad (8)$$

wird. Die Elemente von  $\mathbf{A}_{h_1}$  (bzw. von  $\mathbf{A}$ ) verhalten sich in bezug auf den g. g. T. mit  $n''$  so wie die Elemente von

$$\left\{ \frac{a' + vn''}{d'} + v \right\}_{v=0,1,2,\dots}.$$

Wir beachten noch

$$(h_3, a + vd) = (h_3, a) = 1 \quad (9)$$

und erhalten die Aussage: Jede Sequenz von  $\mathbf{A}$  der Länge  $g(n'')$  enthält mindestens eine zu  $n$  teilerfremde Zahl. Nach der Definition von  $g(n'')$  existiert nun andererseits eine Sequenz

$$A + 1, A + 2, \dots, A + g(n'') - 1, \quad (10)$$

so dass keine dieser Zahlen zu  $n''$  (also auch zu  $n$ ) teilerfremd ist. Wir können nach (7)  $w$  so wählen, dass

$$wn'' + (A + 1)d' \equiv a' \pmod{d'} \quad (11)$$

erfüllt ist. Damit wird aber

$$\begin{aligned} wn'' + (A + 1)d' &= a' + vd' \\ wn''(A + 2)d' &= a' + (v + 1)d' \end{aligned}$$

$$wn'' + (A + g(n'') - 1)d' = a + (v + g(n'') - 2)d' \quad (12)$$

eine Sequenz von  $A_{h_1}$  der Länge  $g(n'') - 1$ , bei welcher keine Zahl zu  $n''$  teilerfremd ist. Mit Berücksichtigung von (9) ist der Satz bewiesen. Als einfache Folgerung ergibt sich:

Sei  $(a, d) = 1$ ;  $n = \prod_{\substack{p \leq N \\ p \nmid d}} p$ . Dann enthält die Sequenz  $a, a+d, \dots, a+(g(n)-1)d$  mindestens eine Zahl, welche nur Primteiler  $> N$  besitzt. Diese Zahl der Gestalt  $a+vd$  ist selbst Primzahl, wenn  $a < d$ ;  $g(n)d \leq (N+1)^2$  erfüllt ist.

Hans-Joachim Kanold, Braunschweig

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. JACOBSTHAL, *Über Sequenzen ganzer Zahlen, von denen keine zu n teilerfremd ist, I-III*, Norske Vid. Selsk. Forhdl. 33, 117–124, 125–131, 132–139 (1960).

## Kleine Mitteilungen

### Bemerkungen zum Kontraktionsprinzip

**1. Einleitung.** Es ist der Zweck dieser Note, einen neuen Zugang zum Kontraktionsprinzip und zu anderen Sätzen über kontrahierende Abbildungen aufzuzeigen. Bei diesem Zugang ist eine «Grundformel» grundlegend, aus welcher alle anderen Aussagen leicht hergeleitet werden können.

**2. Grundformel.**  $(X, \rho)$  ist immer ein vollständiger metrischer Raum,  $T$  ist eine Abbildung von  $X$  in sich selbst. Die Abbildung  $T$  ist eine Kontraktion (oder kontrahierend), wenn

$$\rho(Tx, Ty) \leq a\rho(x, y) \text{ für } x, y \in X \quad (1)$$

gilt, wobei  $0 \leq a < 1$  ist. Durch Induktion folgt für  $n = 1, 2, \dots$

$$\rho(T^n x, T^n y) \leq a^n \rho(x, y) \text{ für } x, y \in X. \quad (2)$$

Es sei  $x, y \in X$ . Aus der Dreiecksungleichung und aus (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \rho(x, Tx) + \rho(Tx, Ty) + \rho(Ty, y) \\ &\leq \rho(x, Tx) + a\rho(x, y) + \rho(y, Ty). \end{aligned}$$

Wenn der zweite Term auf der rechten Seite auf die linke Seite gebracht und die entstehende Ungleichung durch  $1-a$  dividiert wird, ergibt sich unsere Grundformel

$$\rho(x, y) \leq \frac{1}{1-a} \{\rho(x, Tx) + \rho(y, Ty)\} \text{ für } x, y \in X. \quad (\text{GF})$$