Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 31 (1976)
Heft: 4

Artikel: Konjugierte Stützhyperebenen von konvexen Körpern im Rn
Autor: Marti, J.T.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31398

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Band 31 | Heft 4 | Seiten 81-104 | 10. Juli 1976

Konjugierte Stützhyperebenen von konvexen Körpern im $\mathbf{R}^n$

1. Einleitung

Bekanntlich sind bei einer Ellipse die Tangenten an zwei bezüglich des Ellipsenmittelpunktes symmetrisch liegenden Randpunkten x und y parallel zum zur Strecke x,y konjugierten Ellipsendurchmesser. Es gibt also zu jedem zentralsymmetrisch liegenden Randpunktepaar immer zwei parallele Stützgeraden an die Ellipsenfläche. Dabei verstehen wir unter einer *Stützhyperebene* einer Menge X im reellen euklidischen Raum $\mathbf{R}^n (n \geq 2)$ eine Hyperebene H, welche X so schneidet, dass die Punkte von $X \setminus H$ alle auf derselben Seite von H liegen. Es ist klar, dass man eine Stützhyperebene in $\mathbf{R}^2$ oder $\mathbf{R}^3$ eine *Stützgerade* bzw. eine *Stützebene* nennt. Eine Stützhyperebene H ist offenbar durch einen Punkt x in X, *Stützpunkt* genannt, und ein Normalenvektor p zu H bestimmt, wobei x und p die Bedingung

$$\max\{(x',p): x' \in X\} = (x,p)$$

erfüllen und (.,.) das übliche Skalarprodukt in $\mathbf{R}^n$ bedeutet.

Wir nennen hier eine abgeschlossene beschränkte (d.h. kompakte) konvexe Menge X mit innerem Punkt in $\mathbf{R}^n$ einen *konvexen Körper*. Es wird als bekannt vorausgesetzt, dass jeder Randpunkt eines konvexen Körpers X ein Stützpunkt von X ist; dies ist eine unmittelbare Konsequenz des folgenden Trennungssatzes (siehe z.B. F.A. Valentine [9], S.34, oder H.G. Eggleston [3], S.20) für konvexe Mengen: Sind X und Y nichtleere disjunkte konvexe Mengen in $\mathbf{R}^n$ und enthält X einen inneren Punkt, so gibt es eine X und Y *trennende* Hyperebene, d.h. eine Hyperebene H so, dass $X \setminus H$ und $Y \setminus H$ auf verschiedenen Seiten von H liegen. Es ist nun leicht einzusehen, dass folgende Verallgemeinerung über das anfänglich erwähnte Resultat gilt: Jeder kreisförmige (also zentralsymmetrische) konvexe Körper in $\mathbf{R}^n$ besitzt zwei verschiedene parallele Stützhyperebenen und zwei entsprechende Stützpunkte, deren Verbindungsgerade eine vorgegebene Richtung aufweist.

Ist s ein Einheitsvektor und X ein konvexer Körper in $\mathbf{R}^n$, so nennen wir zwei verschiedene parallele Stützhyperebenen G und H von X *konjugiert* bezüglich s, falls es Stützpunkte x und y auf G bzw. H gibt so, dass die Gerade durch x und y die Richtung s besitzt. Es erhebt sich nun die Frage, ob das folgende, noch allgemeinere, und als Proposition formulierte Resultat gilt:

Proposition. *Für jeden Einheitsvektor s und jeden konvexen Körper X in* $\mathbf{R}^n$ *existieren zwei bezüglich s konjugierte Stützhyperebenen an X.*

In dieser Arbeit werden für die obige Proposition verschiedene Beweise geliefert. Es ist noch zu erwähnen, dass die Existenz von konjugierten Stützhyperebenen schon in den Publikationen von T. Bang [1, 2] über die Lösung des von A. Tarski [8] gestellten sog. Plankenproblems (die Beschreibung dieses Problems wird etwas weiter unten gegeben) implizite verwendet, jedoch weder bewiesen noch mit einer Referenz belegt wurde. Es ist zu vermuten, dass Bang die obige Proposition einfach heuristisch als richtig angenommen hat. Es stellt sich aber heraus, dass einige der Beweise der Proposition, wie viele Beweise aus der Theorie der konvexen Mengen, zwar elementar, aber nicht ganz trivial sind. Ferner ist noch festzustellen, dass das (übrigens 18 Jahre lang ungelöst gebliebene) Plankenproblem später auch ohne Verwendung der vorangehenden Proposition gelöst werden konnte (man vgl. W. Fenchel [4]).

Es sei hier noch kurz das sog. Plankenproblem beschrieben. Die Menge der Punkte in $\mathbf{R}^n$, die auf oder zwischen zwei parallelen Hyperebenen liegen, nennt man eine *Scheibe*, wobei der Abstand der die Scheiben begrenzenden Hyperebenen als die *Dicke der Scheibe* bezeichnet wird. Ist X ein konvexer Körper in $\mathbf{R}^n$, so nennt man das Minimum d der Dicken aller Scheiben, die X enthalten, die *Dicke* von X; d.h.

$$d := \min_{s \in S} \max_{x, x' \in X} (x - x', s),$$

wobei S die Menge aller Einheitsvektoren von $\mathbf{R}^n$ ist. Die Behauptung des *Plankenproblems* lautet nun: Wird X von endlich vielen Scheiben der Dicke d_1, bzw. $d_2, \ldots, d_m$ überdeckt, so gilt $d \leq d_1 + \cdots + d_m$.

Die Ideen für einen Teil der Beweise sind in einem Seminar über die Theorie der konvexen Mengen an der ETH Zürich entstanden. Dabei haben viele der Teilnehmer, insbesondere J. Hersch, R. Bloch und ein paar Studenten mit ihren Bemerkungen zum Gelingen dieses Artikels einiges beigetragen.

2. Ein Approximationslemma

Für einige der hier gelieferten Beweise mussten noch weitere Voraussetzungen an den konvexen Körper X gemacht werden. Dass diese zusätzlichen Voraussetzungen für die Proposition ohne Beschränkung der Allgemeinheit gemacht werden können, zeigt das hier folgende Approximationslemma. Die Voraussetzungen sind:

(i) X sei *glatt*, d.h. zu jedem Stützpunkt von X gebe es genau eine X stützende Hyperebene und

(ii) X sei *strikt konvex*, d.h. für alle Punkte x und y in X mit $x \neq y$, und alle Zahlen t in $(0,1)$ sei $tx + (1-t)y$ ein innerer Punkt von X. Es ist bekannt (siehe z.B. F.A. Valentine [9], Satz 7.7) und auch leicht zu verifizieren, dass mit (ii) jede Stützhyperebene von X mit X genau einen Punkt gemeinsam hat. Erfüllt X beide Eigenschaften (i) und (ii), so nennt man X *regulär*. Es ist bekannt (siehe z.B.

H. G. EGGLESTON [3], Theorem 34), dass jeder konvexe Körper X in $\mathbf{R}^n$ sich bezüglich der Hausdorffschen Metrik beliebig genau durch reguläre konvexe Körper approximieren lässt; wobei die Hausdorffsche Metrik eine auf der Menge K der konvexen Körper von $\mathbf{R}^n$ durch

$$d(X,Y) := \inf\{t>0 : X \subset Y+tU, Y \subset X+tU\}, X, Y \in K$$

definierte Distanzfunktion ist und U, der Einheitsball von $\mathbf{R}^n$, die Menge der Vektoren der Länge ≤ 1 in $\mathbf{R}^n$ bezeichnet. Das oben erwähnte Approximationslemma basiert auf diesem letzten Resultat:

Approximationslemma. *Falls für jeden regulären konvexen Körper in* $\mathbf{R}^n$ *und jeden Vektor s in S bezüglich s konjugierte Stützhyperebenen existieren, so gibt es auch für jeden konvexen Körper in* $\mathbf{R}^n$ *und jedes s in S konjugierte Stützhyperebenen bezüglich s.*

Beweis. Es sei X ein konvexer Körper in $\mathbf{R}^n$ und s in S. Dann gibt es eine Folge $\{X_k\}$ von regulären konvexen Körpern in $\mathbf{R}^n$ so, dass $\lim_k d(X, X_k) = 0$. Mit G_k und H_k bezeichnen wir zwei bezüglich s konjugierte Stützhyperebenen an X_k und $p_k \in S$ sei eine Normale zu G_k (und H_k). Da X_k regulär ist, bestehen $X_k \cap G_k$ und $X_k \cap H_k$ aus je einem Punkt x_k, bzw. y_k. Offenbar gibt es eine Zahl $t>0$ so, dass die Mengen $X, X_1, X_2, \ldots$ im Ball tU enthalten sind. Da die Mengen S und tU kompakt sind, gibt es eine Teilfolge $\{X_{j(k)}\}$ von $\{X_k\}$ und Elemente p in S sowie x, y in X so, dass $\lim_k p_{j(k)} = p$, $\lim_k x_{j(k)} = x$ und $\lim_k y_{j(k)} = y$. Damit gilt für alle Punkte x' in X

$$\begin{aligned}(y,p) &= \lim_k (y_{j(k)}, p_{j(k)}) \\ &\leq \lim_k (x', p_{j(k)}) \\ &= (x', p) \\ &\leq \lim_k (x_{j(k)}, p_{j(k)}) \\ &= (x,p),\end{aligned}$$

d. h. die durch x und y gehenden und zu p normalen Hyperebenen sind konjugierte Stützhyperebenen an X, ebenfalls bezüglich s, falls wir zeigen können, dass $x \neq y$: Wäre $x = y$, so wäre wegen den obigen Ungleichungen

$$(x', p) = (x, p), x' \in X.$$

X, als konvexer Körper, enthält aber einen inneren Punkt. Es gibt deshalb ein $\varepsilon > 0$ und ein x' in X so, dass $x' + \varepsilon p \in X$. Damit erhielte man

$$\begin{aligned}(x,p) &= (x' + \varepsilon p, p) \\ &= (x', p) + \varepsilon (p, p) \\ &= (x, p) + \varepsilon,\end{aligned}$$

im Widerspruch zu $\varepsilon > 0$. □

3. Analytischer Beweis für n = 2

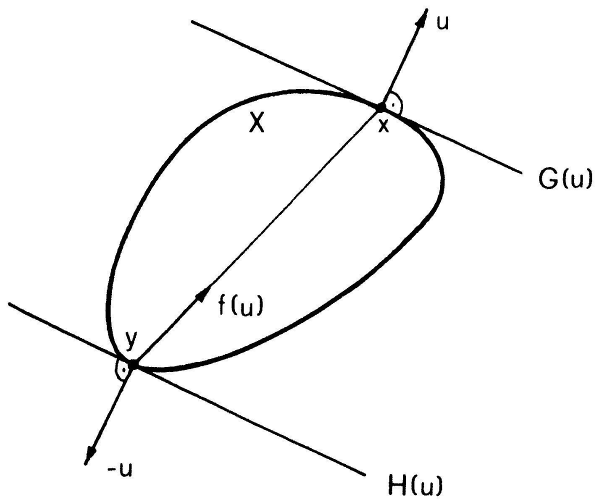
Es sei

$$a := \min\{(x,s) : x \in X\},$$
$$b := \max\{(x,s) : x \in X\},$$

und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei s der erste Standardbasisvektor von $\mathbf{R}^2$. Ferner seien x_a und x_b Randpunkte von X mit $(x_a, s) = a$ und $(x_b, s) = b$. Die zwei Randkurven von X zwischen x_a und x_b bilden den Graphen von je einer konvexen Funktion f_1 und einer konkaven Funktion f_2 auf dem Intervall $[a,b]$ der s-Achse. Aus der Analysis (siehe z.B. R.T. ROCKAFELLAR [6], Theorem 25.3) ist bekannt, dass f_1 und f_2 mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten (entsprechend den höchstens abzählbar vielen Ecken von X) auf (a,b) differenzierbar sind und, dass es monoton wachsende (aber nicht unbedingt stetige) Funktionen g_1 und g_2 auf $[a,b]$ gibt so, dass $g_1(a) = g_2(a) = -\infty$, $g_1(b) = g_2(b) = \infty$ und g_1, bzw. $-g_2$ in den Existenzpunkten mit den Ableitungen von f_1 bzw. f_2 übereinstimmen. Nun erweitern wir die Graphen von g_1 und g_2 durch Strecken auf Parallelen senkrecht zur s-Achse zu je einer zusammenhängenden Menge. Wegen der Monotonie von g_1 und g_2 gibt es offenbar einen beiden Mengen gemeinsamen Punkt (c,d), mit $c \in [a,b]$. Nehmen wir jetzt die Randpunkte $x := (c, f_2(c))$ und $y := (c, f_1(c))$ von X, so sind schliesslich wegen der Konvexität von X die Gerade $x + \{t(1,d) : t \in \mathbf{R}\}$ und die dazu parallele Gerade durch y konjugierte Stützgeraden an X bezüglich s. □

4. Topologischer Beweis für n = 2

Es sei zuerst angenommen, dass X regulär ist, wobei allerdings von der Regularitätsvoraussetzung nur die strikte Konvexität verwendet werden muss. s sei ein beliebiger Einheitsvektor in $\mathbf{R}^2$. Aus Kompaktheitsgründen gibt es zu jedem Vektor u in S zwei verschiedene Stützgeraden $G(u)$ und $H(u)$ mit von X wegweisenden Normalen u bzw. $-u$. Mit $f(u)$ bezeichnen wir einen Einheitsvektor, der in Richtung vom (einzigen) Stützpunkt y von H nach dem (einzigen) Stützpunkt x von G zeigt (vgl. Fig. 1). Durch die Zuordnung $u \to f(u)$ wird eine Funktion f von S in sich defi-



Figur 1

niert. Offenbar gilt $f(-u) = -f(u)$, $u \in S$, d.h. f bildet Antipodenpaare in Antipodenpaare ab. Ausserdem ist f stetig: Es soll eine Folge $\{u_k\}$ von Vektoren in S gegen ein u in S konvergieren. Würde die Folge $\{x_k\}$ der entsprechenden Stützpunkte von $G(u_k)$ nicht gegen den Stützpunkt x von $G(u)$ konvergieren, so gäbe es wegen der Kompaktheit von X und der Stetigkeit des Skalarproduktes einen von x verschiedenen Punkt in $X \cap G(u)$. Dies würde der Voraussetzung der strikten Konvexität von X widersprechen. Die Punkte x und, mit demselben Argument, die Punkte y hängen also stetig von u ab. Offenbar hängt dann auch $f(u)$ stetig von u ab.

Es sei schliesslich S_0 irgend ein Bogenintervall in S mit Länge $\geq \pi$ (das also zwei Antipodenpunkte enthält). Wegen der Stetigkeit von f ist das Bild $f(S_0)$ von S_0 wieder zusammenhängend. Weil $f(S_0)$ auch zwei Antipodenpunkte enthält, enthält dann $f(S_0)$ ein Bogenintervall der Länge $\geq \pi$, also einen der Vektoren s oder $-s$. Es gibt deshalb einen Vektor u in S mit $f(u) = s$, d.h. es existieren zwei konjugierte Stützgeraden (nämlich $G(u)$ und $H(u)$) an X bezüglich s. □

5. Funktionalanalytische Lösung im $\mathbf{R}^n$

Wir nehmen an, dass X ein regulärer konvexer Körper und dass s ein Einheitsvektor in $\mathbf{R}^n$ sei. Ferner sei $H(s)$ eine zu s orthogonale Hyperebene in $\mathbf{R}^n$. Wir setzen hier als bekannt voraus, dass jede konvexe Funktion stetig ist (siehe z.B. A.W. ROBERTS, D.E. VARBERG [5], Theorem 41.C). Da die orthogonale Projektion $X(s)$ von X auf $H(s)$ kompakt ist und die reellwertige Funktion f, definiert durch

$$f(z) = \max\{|t-t'| : t, t' \in \mathbf{R}, z+ts, z+t's \in X\}, \quad z \in X(s),$$

offenbar konkav, also stetig ist, gibt es einen Punkt z_0 in $X(s)$, wo f ein absolutes Maximum besitzt. Da X regulär (und konvex) ist, muss z_0 ausserdem der einzige derartige Punkt in $X(s)$ sein. Nun sei

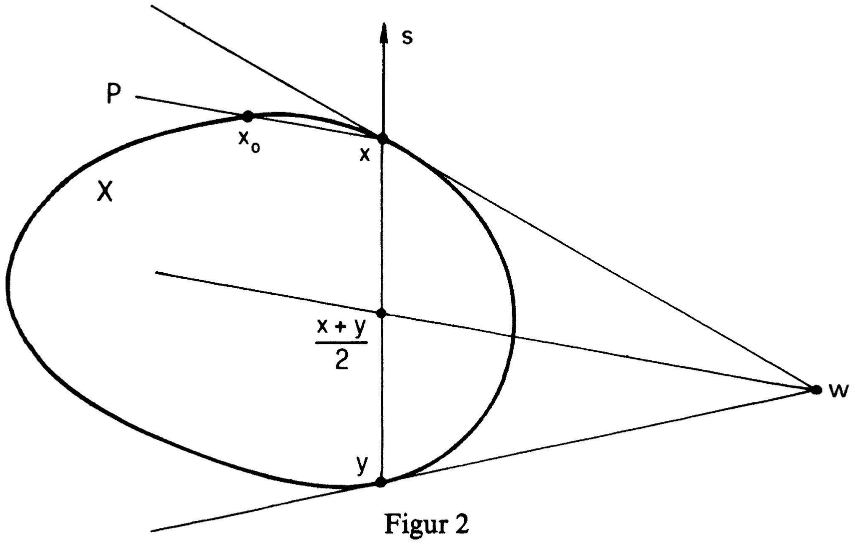
$$t := \max\{t' \in \mathbf{R} : z_0 + t's \in X\},$$
$$x := z_0 + ts$$
und $y := z_0 + (t - f(z_0))\, s$.

In den Punkten x und y existieren genau je eine Stützhyperebene G und H von X.

Wir machen jetzt die Annahme, dass G nicht parallel zu H sei. Dann gibt es einen Punkt w in $G \cap H$. Die Ebene durch w, x und y bezeichnen wir mit E (vgl. Fig. 2). Durch den Punkt x ziehen wir nun eine Parallele zur Geraden, die durch w und $(x+y)/2$ läuft. Offenbar liegt diese Parallele, wir bezeichnen sie mit P, in E.

Falls $P \cap X = \{x\}$ gibt es, da $(x+y)/2$ ja wegen der strikten Konvexität von X ein innerer Punkt von X ist, in E zwei verschiedene Stützgeraden für $X \cap E$ im Punkt x. Die nach aussen zeigenden Normalen in E an diese Stützgeraden seien p_1 und p_2. Für $i = 1$ und 2 gilt dann für p_i (wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, dass $(x+y)/2 = 0$; 0 ist damit ein innerer Punkt von X)

$$(x', p_i) \leq (x, p_i) > 0, \quad x' \in X \cap E,$$
also $(x', p_i) \leq (x, p_i) \inf\{t > 0 : t^{-1}x' \in X\}, \quad x' \in E$.



Figur 2

Nach dem Satz von Hahn-Banach (siehe z.B. F.A. Valentine [9], Satz 2.18; oder in jedem Lehrbuch über Funktionalanalysis) gibt es deshalb einen von Null verschiedenen Vektor q_i in $\mathbf{R}^n$ so, dass

$$(x',p_i) = (x',q_i), x' \in E \tag{1}$$
und $(x',q_i) \leq (x,p_i) \inf\{t>0: t^{-1}x' \in X\}, x' \in \mathbf{R}^n$.

q_i erfüllt dann wegen $\inf\{t>0: t^{-1}x' \in X\} \leq 1, x' \in X$ die Gleichung

$$\begin{aligned}(x',q_i) &\leq (x,p_i) \\ &= (x,q_i), x' \in X.\end{aligned}$$

Es gäbe also im Punkt x zwei verschiedene Stützhyperebenen an X (man beachte, dass mit $p_1 \neq p_2$ wegen Gleichung (1) auch $q_1 \neq q_2$ gelten muss), was im Gegensatz zur Regularität von X stehen würde.

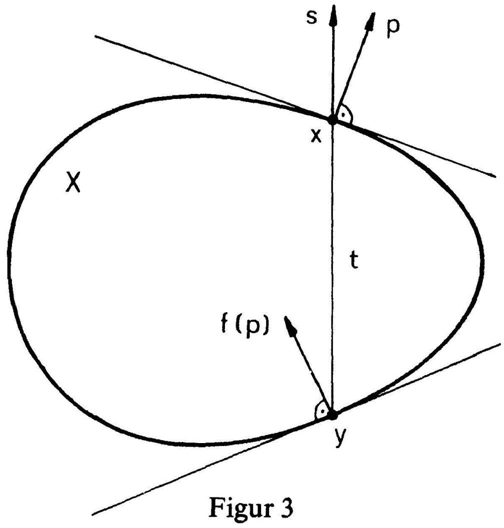
Falls anderseits die Parallele P den Rand von X in einem weiteren, von x verschiedenen Punkt x_0 schneidet, so ist wegen der strikten Konvexität von X jeder Punkt im Inneren der Strecke x, x_0 auch ein innerer Punkt von X. Das gleiche Argument auf den Punkt y angewandt ergibt damit, dass es in E eine das Innere dieser beiden Strecken schneidende Parallele zur Geraden durch x und y gibt. Da die Länge des Durchschnitts dieser Parallelen mit X offenbar grösser wäre als $f(z_0)$, ist die oben gemachte Annahme falsch, d.h. G und H sind parallele, also konjugierte Stützhyperebenen für X bezüglich s.

Für nichtreguläre X folgt der Beweis schliesslich aus dem Approximationslemma von Abschnitt 2. □

6. Topologischer Beweis im $\mathbf{R}^n$

Es sei s in S gegeben und $S^+(s)$ sei die Hemisphäre $S^+(s) := \{s' \in S: (s',s) \geq 0\}$. Wieder nehmen wir zuerst an, dass X ein regulärer konvexer Körper in $\mathbf{R}^n$ sei. Da X kompakt und regulär ist, gibt es, wie leicht einzusehen ist, zu jedem p in $S^+(s)$ genau ein (Stützpunkt) x in X mit $\max\{(x',p): x' \in X\} = (x,p)$. Nun sei $t := \max\{t' \geq 0:$

$x - t's \in X\}$. Wieder weil X regulär ist und weil $y := x - ts$ ein Randpunkt (also ein Stützpunkt) von X ist, gibt es genau einen (von p abhängigen) Einheitsvektor $f(p)$ in $S^+(s)$ so, dass $\max\{(x', -f(p)) : x' \in X\} = (y, -f(p))$ (vgl. Fig. 3).



Figur 3

Man kann jetzt verifizieren, dass die durch $f(p)$ definierte Abbildung f von $S^+(s)$ in sich stetig ist: Es sei angenommen, dass in $S^+(s)$ ein Vektor p' gegen p konvergiere. Würde der entsprechende Stützpunkt x' nicht gegen den Stützpunkt x konvergieren, so gäbe es aus Kompaktheitsgründen einen von x verschiedenen Stützpunkt x_0 von X mit einer zu x gemeinsamen Stützhyperebene. Da dies der Regularität von X widerspricht, muss x' gegen x konvergieren. Würde nun wiederum $f(p')$ nicht gegen $f(p)$ konvergieren, so gäbe es wegen der Stetigkeit des Randes von X, nochmals mit demselben Argument wie vorhin, im Randpunkt y zwei verschiedene Stützhyperebenen von X, im Widerspruch zur Regularität von X.

Es ist nicht schwierig einzusehen, dass $S^+(s)$ zum Einheitsball $B := \{x' \in U: (x', s) = 0\}$ eines $n-1$-dimensionalen Teilvektorraumes von $\mathbf{R}^n$ homöomorph ist (z. B. ist die Restriktion auf $S^+(s)$ der Orthogonalprojektion von $\mathbf{R}^{n+1}$ längs s auf die Hyperebene $\{x' \in \mathbf{R}^n: (x', s) = 0\}$ ein solcher Homöomorphismus). Weil jede stetige Funktion von B in sich nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt besitzt (siehe z. B. D. R. Smart [7], Theorem 2.1.11) und weil die Eigenschaft einer stetigen Abbildung einen Fixpunkt zu besitzen eine topologische Eigenschaft ist, gibt es einen Vektor q in $S^+(s)$ so, dass $f(q) = q$. Für diesen Vektor q sind dann offenbar die durch x und y gehenden und zu q orthogonalen Hyperebenen konjugierte Stützhyperebenen von X bezüglich s. Wiederum folgt das Resultat für nichtreguläre X mit dem Approximationslemma von Abschnitt 2. □

J. T. Marti, ETH Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

[1] T. Bang, *On Covering by Parallel Strips*, Matematisk Tidsskrift *B*, 49-53 (1950).
[2] T. Bang, *A Solution of the "Plank Problem"*, Proc. Amer. Math. Soc. *2*, 990-993 (1951).
[3] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge University Press, 1958.

[4] W. FENCHEL, *On Th. Bang's Solution of the Plank Problem*, Matematisk Tidsskrift *B*, 49-51 (1951).
[5] A.W. ROBERTS und D.E. VARBERG, *Convex Functions*, Academic Press, New York, 1973.
[6] R.T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
[7] D.R. SMART, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, 1974.
[8] A. TARSKI, *Uwagi o stopniu równowaznósci wielokatów*, Parameter *2*, 1932.
[9] F.A. VALENTINE, *Konvexe Mengen*, Bibl. Inst. Mannheim, Nr.402/402a, 1968.

Elementare Betrachtungen über arithmetische Folgen

Herrn Professor Dr. E. Trost zum 65. Geburtstage

Im folgenden bezeichnen kleine lateinische Buchstaben natürliche Zahlen. Wir betrachten Mengen der Gestalt

$$\mathbf{A}=\{a,a+d,a+2d,\ldots\}. \tag{1}$$

Den g. g. T. der Zahlen a, d, n bezeichnen wir durch

$$(a,d,n)=h. \tag{2}$$

Aus $h>1$ folgt, dass alle Elemente von $\mathbf{A}$ durch h teilbar sind und damit auch, dass kein Element von $\mathbf{A}$ zu n teilerfremd ist. Wir setzen von nun an voraus:

$$h=1, n>1. \tag{3}$$

Wir führen jetzt die Funktion $g(n)$ von E. Jacobsthal ein als Maximalabstand zweier aufeinanderfolgender zu n teilerfremder natürlicher Zahlen [1]. Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz. *Jede Sequenz von* $\mathbf{A}$ *der Länge* $g\left(\frac{n}{(d,n)}\right)$ *enthält mindestens eine zu n teilerfremde Zahl; es gibt Sequenzen von* $\mathbf{A}$ *der Länge* $g\left(\frac{n}{(d,n)}\right)-1$, *welche keine zu n teilerfremde Zahl enthalten.*

Beweis. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein.

$$\begin{array}{lll} (a,d)=h_1; & a=h_1 a'; & d=h_1 d'; \\ (a,n)=h_2; & a=h_2 a''; & n=h_2 n'; \\ (d,n)=h_3; & d=h_3 d''; & n=h_3 n''; \end{array} \tag{4}$$

Wegen (3) sind h_1, h_2, h_3 paarweise teilerfremd, ausserdem gilt

$$(n,h_1)=1. \tag{5}$$