Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 31 (1976)
Heft: 3

Artikel: Eine Übertragung der Formel von Gauss-Bonnet auf ebene Netze
Autor: Walser, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31396

(6), and the resulting expression can be evaluated by exactly the same procedure used for I_1. The proof is complete.

Richard S. Ellis*,
University of Massachusetts, Amherst, USA

*) Supported in part by National Science Foundation Grant GP-28576.

REFERENCES

[1] GEORGE B. THOMAS, Jr., *Calculus and Analytic Geometry*, Part 2, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1972).

Elementarmathematik und Didaktik

Eine Übertragung der Formel von Gauss-Bonnet auf ebene Netze

Bei geeigneter Übertragung der Begriffe *Gausssche Krümmung* und *geodätische Krümmung* auf ebene Netze kann man zu einer kombinatorischen Formel gelangen, die eine gewisse Analogie zur Formel von Gauss-Bonnet aufweist; bei dieser Übertragung handelt es sich um eine Diskretisierung der innergeometrischen Krümmungsbegriffe.

Für den Umfang S eines in einem 2dimensionalen Flächenstück enthaltenen Entfernungskreises mit geodätischem Radius r und Zentrum P erhält man ([3], S. 204)

$$S = 2\pi r - \frac{K_0 \pi}{3} r^3 + \cdots, \tag{1}$$

wobei K_0 die Gausssche Krümmung in P ist; K_0 ist also ein Mass für die Abweichung dritter Ordnung von S gegenüber dem Umfang eines Kreises mit demselben Radius r in der euklidischen Ebene.

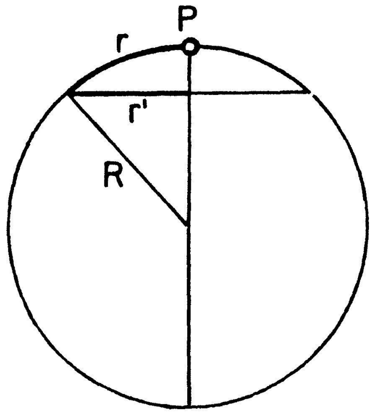

Fig. 1

Auf der Kugel mit Radius R ist die Gausssche Krümmung $K = \text{const.} = (1/R)^2$; ein Entfernungskreis mit geodätischem Radius r ($r < R\pi/2$) ist ein Kleinkreis mit euklidischem Radius $r' = R \sin r/R$. Für seinen Umfang S errechnet man

$$S = 2\pi R \sin \frac{r}{R} = 2\pi r - 2K\pi \frac{r^3}{3!} + 2K^2\pi \frac{r^5}{5!} \mp \cdots, \tag{2}$$

womit die Formel (1) für diesen Spezialfall bestätigt ist.

Wir betrachten nun ein Polyeder, dessen Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind. Für Entfernungskreise auf der Polyederoberfläche, welche einen innern Punkt einer Seitenfläche oder einer Kante als Zentrum haben und deren (auf der Polyederoberfläche gemessene) Radius nicht grösser ist als der Abstand des Zentrums vom nächstgelegenen Eckpunkt, erhält man den Umfang $S = 2\pi r$ (Fig. 2); für Entfer-

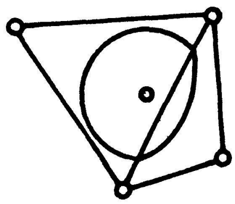

Fig. 2

nungskreise, welche einen Eckpunkt A der Ordnung $i(A)$ als Zentrum haben und deren Radius nicht grösser als die Kantenlänge ist (Fig. 3), erhält man den Umfang

$$S = \frac{i(A)}{6} 2\pi r = 2\pi r - \left(1 - \frac{i(A)}{6}\right) 2\pi r. \tag{3}$$

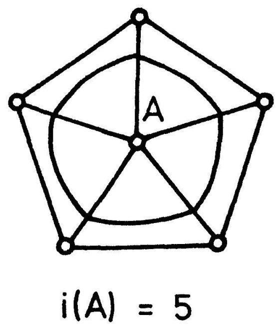

Fig. 3

Es ist also naheliegend, dem Eckpunkt A der Ordnung $i(A)$ die diskrete *Krümmung*

$$K(A) \stackrel{def}{=} 1 - \frac{i(A)}{6} \tag{4}$$

zuzuordnen. Dieser Krümmungsbegriff ist rein kombinatorisch; er kann deshalb übertragen werden auf ein ebenes Netz, welches ausschliesslich 3-Seit-Zellen enthält (zum Begriff des ebenen Netzes siehe [2], S. 55).

Man kann (mit derselben Motivation) diesen Krümmungsbegriff noch verallgemeinern: jedem Knoten A der Ordnung $i(A)$ eines ebenen Netzes N, welches ausschliesslich n-Seit-Zellen enthält, wird die rationale Zahl

$$K(A) \stackrel{def}{=} 1 - i(A) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \tag{5}$$

zugeordnet.

Es sei nun b eine orientierte geschlossene Jordan-Kurve, für welche gilt:

a) b enthält keinen Knoten von N,

b) b schneidet jede Kante von N höchstens einmal,

c) b schneidet jede n-Seit-Zelle von N höchstens einmal.

b zerlegt die Ebene in zwei Gebiete; G sei dasjenige dieser beiden Gebiete, welches links von b liegt (Fig. 4). Ferner seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ diejenigen n-Seit-Zellen von N, welche von b geschnitten werden; r_j sei die Anzahl der Randknoten von Z_j, welche links von b liegen (Fig. 5). Schliesslich sei

e_i die Anzahl der Knoten der Ordnung i, welche in G enthalten sind,

k_G die Anzahl der Kanten, welche in G enthalten sind und

f_G die Anzahl der n-Seit-Zellen, welche in G enthalten sind.

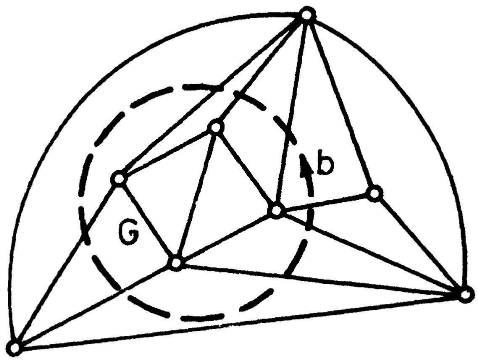

Fig. 4

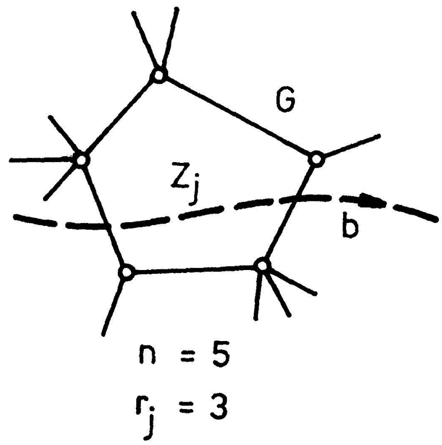

Fig. 5

Da jeder Knoten der Ordnung i mit i Kanten inzidiert, wird durch $\sum_{i=1}^{\infty} i\,e_i$ jede Kante, die in G enthalten ist, zweimal und jede der m Kanten, welche mit einem Knoten in G und einem Knoten ausserhalb G inzidieren, einmal gezählt; es ist also

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\,e_i - \sum_{j=1}^{m} 1 = 2\,k_G\,. \tag{6}$$

Jeder Knoten der Ordnung i ist Randknoten von i n-Seit-Zellen; durch $\sum_{i=1}^{\infty} i\,e_i$ wird also jede n-Seit-Zelle, welche in G enthalten ist, n mal und jede Zelle Z_j, welche von b geschnitten wird, r_j mal gezählt. Es ist also

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\,e_i - \sum_{j=1}^{m} r_j = n\,f_G\,. \tag{7}$$

Wir ändern nun das gegebene Netz ab, indem wir sämtliche Knoten und Kanten, welche ausserhalb von G liegen, entfernen und die m Kanten, welche von b geschnitten werden, mit einem einzigen neuen Knoten ausserhalb G inzidieren lassen (Abänderung von Fig. 4 zu Fig. 6). Das abgeänderte Netz N' enthält i.a. nicht mehr ausschliesslich n-Seit-Zellen. Es sei nun

e' die Anzahl der Knoten von N',

k' die Anzahl der Kanten von N' und

f' die Anzahl der Zellen von N'.

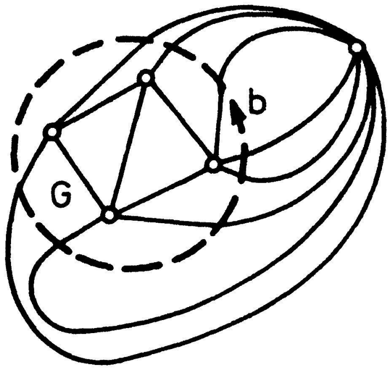

Fig. 6

Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$e' = \sum_{i=1}^{\infty} e_i + 1\,, \tag{8}$$

$$k' = k_G + m\,; \tag{9}$$

$$f' = f_G + m\,. \tag{10}$$

Für das Netz N' gilt nach der Eulerschen Formel (vgl. [2], S. 56)

$$e' - k' + f' = 2\,, \tag{11}$$

wegen (8), (9) und (10) also

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i - k_G + f_G = 1\,. \tag{12}$$

Setzt man (6) und (7) in (12) ein, erhält man

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i \left(1 - \frac{i}{2} + \frac{i}{n}\right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2} - \frac{r_j}{n}\right) = 1\,. \tag{13}$$

Nach (5) ist der erste Summand von (13) die Summe der diskreten Krümmungen der in G enthaltenen Knoten. Interpretiert man den zweiten Summanden von (13) als totale *geodätische Krümmung* der Randkurve b, so wird die Analogie von (13) zur Formel von Gauss-Bonnet

$$\iint_G K\, dO + \oint_{\partial G} \varkappa_g\, ds = 2\pi \tag{14}$$

evident.

Bemerkung: Die Formel (13) gilt auch ohne die Einschränkungen (b) und (c) für die Kurve b.

Das zu N duale Netz (zum Begriff des dualen Netzes siehe [4], S. 31) ist ein reguläres Netz n-ter Ordnung, d.h. jeder Knoten inzidiert mit n Kanten.

In einem solchen regulären Netz n-ter Ordnung sei ein Kreis c, d.h. eine geschlossene Kantenfolge, die lauter verschiedene Kanten und lauter verschiedene

Zwischenknoten $B_1, B_2, \ldots, B_m$ aufweist, ausgezeichnet; c teilt die Trägerebene des Netzes in zwei Gebiete, von denen dasjenige, welches bezüglich des durch die Numerierung der Randknoten B_j orientierten Kreises c links liegt, mit H bezeichnet wird. Zu jedem Randknoten B_j sei s_j die Anzahl der in H enthaltenen Zellen, welche B_j als Randknoten haben (Fig. 7). Schliesslich sei f_i die Anzahl der i-Seit-Zellen, welche in H enthalten sind. Mit diesen Bezeichnungen gilt die zu (13) duale Formel

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \left(1 - \frac{i}{2} + \frac{i}{n}\right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2} - \frac{s_j}{n}\right) = 1\,, \tag{15}$$

welche dual zum Beweis von (13) bewiesen wird.

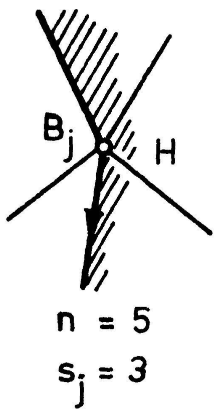

Fig. 7

Ein reguläres Netz dritter Ordnung, welches nur 5- und 6-Seit-Zellen enthält, muss auf Grund der Eulerschen Formel genau 12 5-Seit-Zellen enthalten, während die Anzahl der 6-Seit-Zellen beliebig ($\neq 1$) ist (vgl. [4], S. 57 und [1]). Für ein Gebiet H eines solchen Netzes erhält man aus (15)

$$f_5 + 6 \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{2} - \frac{s_j}{3}\right) = 6\,. \tag{16}$$

Bezeichnet man nun einen Randknoten B_j mit $s_j = 1$ als ausspringende Ecke (Fig. 8a) und einen Randknoten B_j mit $s_j = 2$ als einspringende Ecke von H (Fig. 8b) und schliesslich mit a die Anzahl der ausspringenden und mit e die Anzahl der einspringenden Ecken von H, so erhält man aus (16)

$$f_5 + (a - e) = 6\,. \tag{17}$$

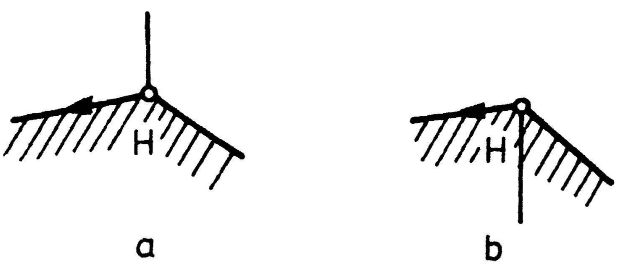

Fig. 8

Diese Formel ist ein Hilfsmittel, um die 5-Seit-Zellen eines solchen Netzes aufzusuchen (Fig. 9).

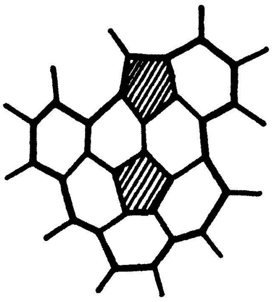

Fig. 9

Für gerades n wird eine Kantenfolge als *geodätisch* definiert, wenn zu jedem Zwischenknoten B_j gilt $s_j = n/2$, also

$$\frac{1}{2} - \frac{s_j}{n} = 0 \tag{18}$$

ist. Da eine geodätische Kantenfolge jeden Knoten höchstens $n/2$ mal treffen kann, ist in einem endlichen ebenen Netz jede geodätische Kantenfolge (i.a. nicht einfach) geschlossen.

Hans Walser, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. Grünbaum: *Convex Polytopes*, New York 1967.
[2] M. Jeger: *Elementare Begriffe und Sätze aus der Theorie der Graphen.* Der Mathematikunterricht *20* (1974), Heft 4, S. 11–64.
[3] E. Kreyszig: *Differentialgeometrie*, Leipzig 1957.
[4] H. Sachs: *Einführung in die Theorie der endlichen Graphen*, Teil II, Leipzig 1972.

Eine zahlentheoretische Konstruktion der Galois-Felder GF(p^2)

In jüngster Zeit interessiert man sich vermehrt für die explizite Konstruktion von Galois-Feldern (siehe etwa [1]). In der Literatur wird gewöhnlich auf das Verfahren mit Hilfe eines irreduziblen Polynoms verwiesen. Hier soll gezeigt werden, wie sich die Galois-Felder von der Ordnung p^2, $p \geq 3$, auf zahlentheoretischem Weg herstellen lassen.

Für eine Primzahl $p \geq 3$ sei

$$Z_p^2 = \{(r, i) \mid r, i \text{ ganz} \wedge 0 \leq r, i \leq p - 1\}.$$

In dieser Menge definieren wir nach dem Vorbild der komplexen Zahlen eine Addition $\oplus$ und eine Multiplikation $\odot$:

$$(r_1, i_1) \oplus (r_2, i_2) = (r_1 + r_2, i_1 + i_2), \tag{1}$$

$$(r_1, i_1) \odot (r_2, i_2) = (r_1 r_2 - i_1 i_2, r_1 i_2 + r_2 i_1). \tag{2}$$