Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 31 (1976)

Heft: 3

Artikel: Zwei Abzählprobleme über Sequenzen mit Zeichen aus einem gegebenen Alphabet

Autor: Razen, Reinhard A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31395

Die Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} t_1^i \mathbf{H}$ gehört, entsprechen umkehrbar eindeutig den Paaren (τ_1, τ_2) von Permutationen aus $\mathfrak{S}_m$ mit der Eigenschaft $\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1$ und $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Welche Permutationen kommen für τ_1 und τ_2 in Frage?

Wegen $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$ ist τ_1 eindeutig bestimmt, und zwar ist $\tau_1 = (0, 1, \ldots, m-1)$.

Es sei $\tau_2(0) = k$. Dann ergibt sich wegen der Vertauschbarkeit von τ_1 und τ_2 notwendig:

$$\tau_2(i) = \tau_2 \tau_1^i(0) = \tau_1^i \tau_2(0) = \tau_1^i(k) = \tau_1^i \tau_1^k(0) = \tau_1^k \tau_1^i(0) = \tau_1^k(i) .$$

Also ist $\tau_2 = \tau_1^k$. τ_2 ist daher durch die Zahl k bereits eindeutig bestimmt. Es ist klar, dass umgekehrt k beliebig vorgeschrieben werden kann.

Die Paare (τ_1, τ_2) von Permutationen aus $\mathfrak{S}_m$ mit den Eigenschaften $\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1$ und $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den Zahlen k mit $0 \leq k \leq m-1$.

Zusammengefasst erhalten wir also folgendes Ergebnis:

Satz 2: Es gibt genau m Untergruppen $\mathfrak{H}_k = (\mathbf{H}_k, \cdot)$ von $\mathfrak{G}$, zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} t_1^i \mathbf{H}_k$ gehört $(k = 1, \ldots, m)$.

Ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{H}_k$ kann leicht mit Hilfe des Korollars angegeben werden:

$\mathfrak{H}_k$ wird erzeugt von den Elementen $t_1^{-\tau_1(i)} t_1 t_1^i$ und $t_1^{-\tau_2(i)} t_2 t_1^i$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$. Wegen $\tau_1(i) = i + 1$ für $0 \leq i \leq m-2$, $\tau_1(m-1) = 0$ und $\tau_2(i) \equiv i + k \bmod m$ folgt:

Korollar: $\mathfrak{H}_k$ wird erzeugt von t_1^m und $t_1^{-k} t_2$.

Eugen Peter Bauhoff,
Universität Mannheim, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Millington, M.H., *Subgroups of the Classical Modular Group*, J. London Math. Soc. *1*, 351–357 (1969).

[2] Newman, M., *Formulas and Multiplicative Relationships for the Parameters of Subgroups of the Modular Group*. Math. Ann. *212*, 173–182 (1974).

[3] Reidemeister, K., *Knoten und Gruppen*, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg *5*, 7–23 (1927).

[4] Wohlfahrt, K., *On some Representations of Sl (2, Z)*, Ill. J. Math. *15*, 144–149 (1971).

Zwei Abzählprobleme über Sequenzen mit Zeichen aus einem gegebenen Alphabet

1. Problemstellung

Es sei ein Alphabet von m Zeichen (Buchstaben) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gegeben. Bildet man nach geeigneten Vorschriften aus diesem Alphabet n-stellige Sequenzen (Wörter der Länge n) $A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_n}$, so kann man sämtliche elementaren kombinatorischen Figuren (Permutationen, Variationen und Kombinationen) erhalten (vgl. hiezu Jeger [2], p. 15ff).

Im folgenden wollen wir die n-stelligen Sequenzen

$$A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_n} \quad \text{mit} \quad j_{i+1} \geq j_i + k, \quad \text{wobei} \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \quad \text{ist,} \tag{I}$$

zugrunde legen. Für $k = 0$ handelt es sich um die Kombinationen mit Wiederholungen, für $k = 1$ um die Kombinationen ohne Wiederholungen von m Elementen zur Klasse n.

Wir stellen uns nun folgende Aufgaben:

A) Man bestimme die Anzahl $B_k(n, m, i, j)$ der Sequenzen obigen Typs, bei denen der Buchstabe A_j an der i-ten Stelle steht.

B) Eine *Koinzidenz* liege vor, wenn der Buchstabe A_i an der i-ten Stelle steht. Gesucht ist die Anzahl $K_k(n, m, r)$ der Sequenzen obigen Typs mit genau r Koinzidenzen $(0 \leq r \leq \min(n, m))$.

2. Lösung der Aufgaben

Die Anzahl $S_k(n, m)$ der n-stelligen Sequenzen, die sich aus dem Alphabet $A_1, \dots, A_m$ unter Beachtung der Bedingungen (I) bilden lassen, ist

$$S_k(n, m) = \binom{m - (k-1)(n-1)}{n}$$

(siehe Kaplansky [3] bzw. Jeger [2], p. 185f).

Bei Berge ([1], p. 24) findet man die folgende

Anwendung (De Moivre): Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, eine natürliche Zahl m als geordnete Summe von n nichtnegativen ganzen Zahlen zu erhalten:

$$m = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \,. \tag{II}$$

Wir setzen nun $s_j = u_1 + \cdots + u_j$ für $1 \leq j \leq n-1$. Jeder Figur (II) lässt sich auf diese Weise eindeutig eine Sequenz $s_1 s_2 \dots s_{n-1}$ zuordnen. Das massgebende Alphabet besteht aus den Zahlen $0, 1, \dots, m$. Aus der Festlegung der s_j geht hervor, dass

$$s_{j+1} \geq s_j \quad (1 \leq j \leq n-2)$$

gelten muss. Es handelt sich daher um Sequenzen vom Typus (I) mit $k = 0$. Die Anzahl der additiven Zerlegungen der Zahl m gemäss (II) beträgt daher $S_0(n-1, m+1) = \binom{m+n-1}{n-1}$.

Wir wenden uns zunächst der Aufgabe A) zu.

Behauptung: $B_k(n, m, i, j) = S_k(i-1, j-k) \cdot S_k(n-i, m-j-k+1)\,.$

Beweis. Steht der Buchstabe A_j an der i-ten Stelle, so kann das Teilwort davor nur ein Wort der Länge $i-1$ über dem Alphabet $A_1, \dots, A_{j-k}$ sein, davon gibt es

$S_k(i-1, j-k)$; das Teilwort nach dem A_j nur ein Wort der Länge $n-i$ über dem Alphabet $A_{j+k}, \ldots, A_m$ (deren Anzahl ist $S_k(n-i, m-j-k+1)$). Da jedes Teilwort vor dem A_j mit jedem Teilwort danach kombiniert ein gemäss (I) gültiges Wort liefert, erhält man die Anzahl aller Wörter mit A_j an der i-ten Stelle als das Produkt der Anzahlen $S_k(i-1, j-k)$ und $S_k(n-i, m-j-k+1)$.

Bemerkung. Offensichtlich kann für $k \geq 1$ nicht jeder Buchstabe an jeder Stelle stehen. So kann die i-te Stelle eines Wortes nicht von einem niedrigeren Buchstaben als $A_{(i-1)k+1}$ und auch nicht von einem höheren als $A_{m-(n-i)k}$ besetzt werden, da sonst die restlichen Buchstaben nicht mehr zu einem Wort im Sinne der Bedingung (I) zusammengesetzt werden können. An der Stelle i können somit nur die Buchstaben A_j mit

$$ki - k + 1 \leq j \leq m - kn + ki \tag{III}$$

stehen.

Wegen $\binom{r}{0} = 1$ erhält man speziell für $i = 1$:

$$B_k(n, m, 1, j) = S_k(n-1, m-j-k+1) .$$

Für die Diskussion der Aufgabe B) führen wir eine Fallunterscheidung durch:

a) $k \geq 2$: Aus der linken Ungleichung von (III) folgt für $j = i$:

$$(k-1)\, i \leq k - 1 .$$

Dies ist für $k \geq 2$ nur durch $i = 1$ erfüllbar, somit kann im vorliegenden Fall nur höchstens eine Koinzidenz auftreten, und zwar dann, wenn der Buchstabe A_1 an erster Stelle steht. Bei den übrigen Fällen (das sind die n-stelligen Wörter über dem Alphabet $A_2, \ldots, A_m$) tritt keine Koinzidenz auf. Daher gilt für $k \geq 2$:

$$K_k(n, m, r) = 0 \quad \text{für} \quad r \geq 2$$

$$K_k(n, m, 1) = B_k(n, m, 1, 1) = S_k(n-1, m-k)$$

$$K_k(n, m, 0) = S_k(n, m-1) .$$

b) $k = 1$: Hier können Koinzidenzen nur an den ersten r Stellen auftreten ($0 \leq r \leq n$). Ihre Anzahl erhält man aus der Überlegung heraus, dass die $(r+1)$-te Stelle von einem Buchstaben mit höherem Index als $r + 1$ besetzt sein muss, d.h. nach den r Koinzidenzen stehen Wörter der Länge $n - r$ über dem Alphabet A_{r+2}, $A_{r+3}, \ldots, A_m$. Somit gilt für $0 \leq r \leq n$

$$K_1(n, m, r) = S_1(n-r, m-r-1) .$$

c) $k = 0$: Sei zunächst auch $r = 0$. Dann gilt:

Für $n = 1$: $K_0(1, m, 0) = m - 1$. (1)

Beweis. Von den m Wörtern der Länge 1: $A_1, \ldots, A_m$ liefern die letzten $m - 1$ keine Koinzidenz.

Für $n \geq m$: $K_0(n, m, 0) = 0$, (2)

d. h., ist die Länge der Wörter nicht kleiner als der Umfang des Alphabets, so gibt es bei jedem Wort mindestens eine Koinzidenz.

Beweis. Sei $A_{j_1} \ldots A_{j_n}$ ein Wort ohne Koinzidenz, dann müsste $j_i > i$ $(1 \leq i \leq n)$ sein. Wegen $j_n \leq m$ würde aber damit $n < m$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

$$1 \neq n < m: K_0(n, m, 0) = K_0(n, m-1, 0) + K_0(n-1, m, 0) \,. \tag{3}$$

Beweis. Die Sequenzen, wo die n-te Stelle nicht vom Buchstaben A_m besetzt ist, sind n-stellige Sequenzen über dem Alphabet $A_1, \ldots, A_{m-1}$. Die Anzahl derer davon, die keine Koinzidenz aufweisen, ist $K_0(n, m-1, 0)$. Die Anzahl der Sequenzen, bei denen der Buchstabe A_m an der n-ten Stelle steht, ist gleich der Zahl der $(n-1)$-stelligen Sequenzen über dem Alphabet $A_1, \ldots, A_m$. Hier ist die Anzahl der Sequenzen ohne Koinzidenz gleich $K_0(n-1, m, 0)$. Die gesuchte Grösse ergibt sich als Summe von $K_0(n, m-1, 0)$ und $K_0(n-1, m, 0)$.

Schliesslich sei $r > 0$; dann gilt:

$$\text{Für } n < r \text{ oder } m < r: K_0(n, m, r) = 0 \,. \tag{4}$$

Beweis. Bei weniger als r Buchstaben oder Stellen kann es nicht r Koinzidenzen geben.

$$\text{Für } n = r \text{ und } m \geq n \text{ oder } m = r \text{ und } n \geq m: K_0(n, m, r) = 1 \,. \tag{5}$$

Beweis. Von den r-stelligen Sequenzen liefert nur eine (nämlich $A_1 A_2 \ldots A_r$) r Koinzidenzen, ebenso von den n-stelligen Sequenzen über dem Alphabet $A_1, \ldots, A_r$ nur die Sequenz $A_1 \ldots A_{r-1} A_r \ldots A_r$ (der Buchstabe A_r steht $n - r + 1$ mal am Ende des Wortes).

Für $n \neq m$ und $n, m > r$:

$$K_0(n, m, r) = K_0(n, m-1, r) + K_0(n-1, m, r). \tag{6a}$$

Der Beweis verläuft analog dem von Formel (3).

$$n = m > r: K_0(n, n, r) = K_0(n, n-1, r) + K_0(n-1, n, r-1) \,. \tag{6b}$$

Beweis. Hier hat der zweite Summand eine andere Gestalt, denn steht der Buchstabe A_n an der n-ten Stelle, so liefert dies ja eine Koinzidenz, so dass an den übrigen $n - 1$ Stellen nur noch $r - 1$ Koinzidenzen auftreten dürfen.

Die Formeln (1) bis (6b) stellen Rekursionsformeln dar zur Berechnung der Zahlen $K_0(n, m, r)$.

3. Beziehungen zwischen den einzelnen Grössen

Zwischen den Grössen S_k, B_k und K_k lassen sich folgende Beziehungen herleiten:

$$\sum_{r=0}^{\min(n,m)} K_k(n, m, r) = S_k(n, m) \,,$$

denn jede Sequenz hat eine eindeutig bestimmte Zahl von Koinzidenzen.

Die Anzahl der vorkommenden Koinzidenzen erhält man einerseits als

$$\sum_{i=1}^{\min(n,m)} B_k(n, m, i, i),$$

andererseits, indem man jede Sequenz mit r Koinzidenzen r-fach zählt. Daher gilt:

$$\sum_{r=1}^{\min(n,m)} r \cdot K_k(n, m, r) = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} B_k(n, m, i, i) .$$

Da bei jedem Wort die i-te Stelle durch genau einen der nach (III) möglichen Buchstaben besetzt wird, gilt für $1 \leq i \leq n$:

$$\sum_{j=ki-k+1}^{m-kn+ki} B_k(n, m, i, j) = S_k(n, m) .$$

Setzt man hier die unter Punkt 2 für die B_k hergeleiteten Ausdrücke ein, so erhält man die folgende Identität:

$$\sum_{j=ki-k+1}^{m-kn+ki} \binom{j-k-(k-1)(i-2)}{i-1} \cdot \binom{m-j-k+1-(k-1)(n-i-1)}{n-i}$$
$$= \binom{m-(k-1)(n-1)}{n} .$$

Ersetzt man hier j durch $j + ki - k + 1$ und m durch $m + kn - k + 1$ sowie anschliessend n durch $n - m$, so erhält man unter Verwendung von

$$\binom{r}{s} = \binom{r}{r-s}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{i+j-1}{i-1} \cdot \binom{n-i-j}{m-j} = \binom{n}{m},$$

eine Formel, die sich anders hergeleitet bei Riordan ([4], p. 7) findet.

Reinhard A. Razen
Montanuniversität Leoben, Österreich

LITERATUR

[1] C. Berge, *Principles of Combinatorics* (Acad. Press, New York and London 1971).
[2] M. Jeger, *Einführung in die Kombinatorik*, Band 1 (Klett, Stuttgart 1973).
[3] I. Kaplansky, Solution of the Problème des ménages, *Bull. Amer. Math. Soc.* 49 (1943), 784–785.
[4] J. Riordan, *Combinatorial identities* (Wiley, New York–London–Sydney 1968).