Zwei Abzählprobleme über Sequenzen mit Zeichen aus einem gegebenen Alphabet

Autor(en): **Razen, Reinhard A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 3

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-31395

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die Untergruppen $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$, zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} t_1^i \mathbf{H}$ gehört, entsprechen umkehrbar eindeutig den Paaren (τ_1, τ_2) von Permutationen aus $\mathfrak{S}_m$ mit der Eigenschaft $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ und $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$.

Welche Permutationen kommen für τ_1 und τ_2 in Frage?

Wegen $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$ ist τ_1 eindeutig bestimmt, und zwar ist $\tau_1 = (0, 1, \ldots, m-1)$.

Es sei $\tau_2(0) = k$. Dann ergibt sich wegen der Vertauschbarkeit von τ_1 und τ_2 notwendig:

$$\tau_2(i) = \tau_2\tau_1^i(0) = \tau_1^i\tau_2(0) = \tau_1^i(k) = \tau_1^i\tau_1^k(0) = \tau_1^k\tau_1^i(0) = \tau_1^k(i) .$$

Also ist $\tau_2 = \tau_1^k$. τ_2 ist daher durch die Zahl k bereits eindeutig bestimmt. Es ist klar, dass umgekehrt k beliebig vorgeschrieben werden kann.

Die Paare (τ_1, τ_2) von Permutationen aus $\mathfrak{S}_m$ mit den Eigenschaften $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ und $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \ldots, m-1$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den Zahlen k mit $0 \leq k \leq m-1$.

Zusammengefasst erhalten wir also folgendes Ergebnis:

Satz 2: Es gibt genau m Untergruppen $\mathfrak{H}_k = (\mathbf{H}_k, \cdot)$ von $\mathfrak{G}$, zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} t_1^i \mathbf{H}_k$ gehört $(k = 1, \ldots, m)$.

Ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{H}_k$ kann leicht mit Hilfe des Korollars angegeben werden:

$\mathfrak{H}_k$ wird erzeugt von den Elementen $t_1^{-\tau_1(i)} t_1 t_1^i$ und $t_1^{-\tau_2(i)} t_2 t_1^i$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$. Wegen $\tau_1(i) = i + 1$ für $0 \leq i \leq m-2$, $\tau_1(m-1) = 0$ und $\tau_2(i) \equiv i + k \bmod m$ folgt:

Korollar: $\mathfrak{H}_k$ wird erzeugt von t_1^m und $t_1^{-k} t_2$.

Eugen Peter Bauhoff,
Universität Mannheim, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Millington, M.H., *Subgroups of the Classical Modular Group*, J. London Math. Soc. *1*, 351–357 (1969).

[2] Newman, M., *Formulas and Multiplicative Relationships for the Parameters of Subgroups of the Modular Group*. Math. Ann. *212*, 173–182 (1974).

[3] Reidemeister, K., *Knoten und Gruppen*, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg *5*, 7–23 (1927).

[4] Wohlfahrt, K., *On some Representations of Sl (2, Z)*, Ill. J. Math. *15*, 144–149 (1971).

Zwei Abzählprobleme über Sequenzen mit Zeichen aus einem gegebenen Alphabet

1. Problemstellung

Es sei ein Alphabet von m Zeichen (Buchstaben) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gegeben. Bildet man nach geeigneten Vorschriften aus diesem Alphabet n-stellige Sequenzen (Wörter

der Länge n) $A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_n}$, so kann man sämtliche elementaren kombinatorischen Figuren (Permutationen, Variationen und Kombinationen) erhalten (vgl. hiezu Jeger [2], p. 15ff).

Im folgenden wollen wir die n-stelligen Sequenzen

$$A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_n} \quad \text{mit} \quad j_{i+1} \geq j_i + k, \quad \text{wobei} \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\} \quad \text{ist,} \tag{I}$$

zugrunde legen. Für $k = 0$ handelt es sich um die Kombinationen mit Wiederholungen, für $k = 1$ um die Kombinationen ohne Wiederholungen von m Elementen zur Klasse n.

Wir stellen uns nun folgende Aufgaben:

A) Man bestimme die Anzahl $B_k(n, m, i, j)$ der Sequenzen obigen Typs, bei denen der Buchstabe A_j an der i-ten Stelle steht.

B) Eine *Koinzidenz* liege vor, wenn der Buchstabe A_i an der i-ten Stelle steht. Gesucht ist die Anzahl $K_k(n, m, r)$ der Sequenzen obigen Typs mit genau r Koinzidenzen $(0 \leq r \leq \min(n, m))$.

2. Lösung der Aufgaben

Die Anzahl $S_k(n, m)$ der n-stelligen Sequenzen, die sich aus dem Alphabet $A_1, \dots, A_m$ unter Beachtung der Bedingungen (I) bilden lassen, ist

$$S_k(n, m) = \binom{m - (k-1)(n-1)}{n}$$

(siehe Kaplansky [3] bzw. Jeger [2], p. 185f).

Bei Berge ([1], p. 24) findet man die folgende

Anwendung (De Moivre): Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, eine natürliche Zahl m als geordnete Summe von n nichtnegativen ganzen Zahlen zu erhalten:

$$m = u_1 + u_2 + \dots + u_n . \tag{II}$$

Wir setzen nun $s_j = u_1 + \dots + u_j$ für $1 \leq j \leq n-1$. Jeder Figur (II) lässt sich auf diese Weise eindeutig eine Sequenz $s_1 s_2 \dots s_{n-1}$ zuordnen. Das massgebende Alphabet besteht aus den Zahlen 0, 1, ..., m. Aus der Festlegung der s_j geht hervor, dass

$$s_{j+1} \geq s_j \quad (1 \leq j \leq n-2)$$

gelten muss. Es handelt sich daher um Sequenzen vom Typus (I) mit $k = 0$. Die Anzahl der additiven Zerlegungen der Zahl m gemäss (II) beträgt daher $S_0(n-1, m+1) = \binom{m+n-1}{n-1}$.

Wir wenden uns zunächst der Aufgabe A) zu.

Behauptung: $B_k(n, m, i, j) = S_k(i-1, j-k) \cdot S_k(n-i, m-j-k+1)$.

Beweis. Steht der Buchstabe A_j an der i-ten Stelle, so kann das Teilwort davor nur ein Wort der Länge $i-1$ über dem Alphabet $A_1, \dots, A_{j-k}$ sein, davon gibt es

$S_k(i-1, j-k)$; das Teilwort nach dem A_j nur ein Wort der Länge $n-i$ über dem Alphabet $A_{j+k}, \ldots, A_m$ (deren Anzahl ist $S_k(n-i, m-j-k+1)$). Da jedes Teilwort vor dem A_j mit jedem Teilwort danach kombiniert ein gemäss (I) gültiges Wort liefert, erhält man die Anzahl aller Wörter mit A_j an der i-ten Stelle als das Produkt der Anzahlen $S_k(i-1, j-k)$ und $S_k(n-i, m-j-k+1)$.

Bemerkung. Offensichtlich kann für $k \geq 1$ nicht jeder Buchstabe an jeder Stelle stehen. So kann die i-te Stelle eines Wortes nicht von einem niedrigeren Buchstaben als $A_{(i-1)k+1}$ und auch nicht von einem höheren als $A_{m-(n-i)k}$ besetzt werden, da sonst die restlichen Buchstaben nicht mehr zu einem Wort im Sinne der Bedingung (I) zusammengesetzt werden können. An der Stelle i können somit nur die Buchstaben A_j mit

$$ki - k + 1 \leq j \leq m - kn + ki \tag{III}$$

stehen.

Wegen $\binom{r}{0} = 1$ erhält man speziell für $i = 1$:

$$B_k(n, m, 1, j) = S_k(n-1, m-j-k+1) .$$

Für die Diskussion der Aufgabe B) führen wir eine Fallunterscheidung durch:

a) $k \geq 2$: Aus der linken Ungleichung von (III) folgt für $j = i$:

$$(k-1)\, i \leq k-1 .$$

Dies ist für $k \geq 2$ nur durch $i = 1$ erfüllbar, somit kann im vorliegenden Fall nur höchstens eine Koinzidenz auftreten, und zwar dann, wenn der Buchstabe A_1 an erster Stelle steht. Bei den übrigen Fällen (das sind die n-stelligen Wörter über dem Alphabet $A_2, \ldots, A_m$) tritt keine Koinzidenz auf. Daher gilt für $k \geq 2$:

$$K_k(n, m, r) = 0 \quad \text{für} \quad r \geq 2$$

$$K_k(n, m, 1) = B_k(n, m, 1, 1) = S_k(n-1, m-k)$$

$$K_k(n, m, 0) = S_k(n, m-1) .$$

b) $k = 1$: Hier können Koinzidenzen nur an den ersten r Stellen auftreten ($0 \leq r \leq n$). Ihre Anzahl erhält man aus der Überlegung heraus, dass die $(r+1)$-te Stelle von einem Buchstaben mit höherem Index als $r+1$ besetzt sein muss, d.h. nach den r Koinzidenzen stehen Wörter der Länge $n-r$ über dem Alphabet A_{r+2}, $A_{r+3}, \ldots, A_m$. Somit gilt für $0 \leq r \leq n$

$$K_1(n, m, r) = S_1(n-r, m-r-1) .$$

c) $k = 0$: Sei zunächst auch $r = 0$. Dann gilt:

Für $n = 1$: $K_0(1, m, 0) = m - 1$. (1)

Beweis. Von den m Wörtern der Länge 1: $A_1, \ldots, A_m$ liefern die letzten $m-1$ keine Koinzidenz.

Für $n \geq m$: $K_0(n, m, 0) = 0$, (2)

d.h., ist die Länge der Wörter nicht kleiner als der Umfang des Alphabets, so gibt es bei jedem Wort mindestens eine Koinzidenz.

Beweis. Sei $A_{j_1} \dots A_{j_n}$ ein Wort ohne Koinzidenz, dann müsste $j_i > i$ $(1 \leq i \leq n)$ sein. Wegen $j_n \leq m$ würde aber damit $n < m$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

$$1 \neq n < m\text{:}\ K_0(n, m, 0) = K_0(n, m-1, 0) + K_0(n-1, m, 0)\ . \tag{3}$$

Beweis. Die Sequenzen, wo die n-te Stelle nicht vom Buchstaben A_m besetzt ist, sind n-stellige Sequenzen über dem Alphabet $A_1, \dots, A_{m-1}$. Die Anzahl derer davon, die keine Koinzidenz aufweisen, ist $K_0(n, m-1, 0)$. Die Anzahl der Sequenzen, bei denen der Buchstabe A_m an der n-ten Stelle steht, ist gleich der Zahl der $(n-1)$-stelligen Sequenzen über dem Alphabet $A_1, \dots, A_m$. Hier ist die Anzahl der Sequenzen ohne Koinzidenz gleich $K_0(n-1, m, 0)$. Die gesuchte Grösse ergibt sich als Summe von $K_0(n, m-1, 0)$ und $K_0(n-1, m, 0)$.

Schliesslich sei $r > 0$; dann gilt:

$$\text{Für } n < r \text{ oder } m < r\text{:}\ K_0(n, m, r) = 0\ . \tag{4}$$

Beweis. Bei weniger als r Buchstaben oder Stellen kann es nicht r Koinzidenzen geben.

$$\text{Für } n = r \text{ und } m \geq n \text{ oder } m = r \text{ und } n \geq m\text{:}\ K_0(n, m, r) = 1\ . \tag{5}$$

Beweis. Von den r-stelligen Sequenzen liefert nur eine (nämlich $A_1 A_2 \dots A_r$) r Koinzidenzen, ebenso von den n-stelligen Sequenzen über dem Alphabet $A_1, \dots, A_r$ nur die Sequenz $A_1 \dots A_{r-1} A_r \dots A_r$ (der Buchstabe A_r steht $n - r + 1$ mal am Ende des Wortes).

$$\text{Für } n \neq m \text{ und } n, m > r\text{:}$$
$$K_0(n, m, r) = K_0(n, m-1, r) + K_0(n-1, m, r). \tag{6a}$$

Der Beweis verläuft analog dem von Formel (3).

$$n = m > r\text{:}\ K_0(n, n, r) = K_0(n, n-1, r) + K_0(n-1, n, r-1)\ . \tag{6b}$$

Beweis. Hier hat der zweite Summand eine andere Gestalt, denn steht der Buchstabe A_n an der n-ten Stelle, so liefert dies ja eine Koinzidenz, so dass an den übrigen $n-1$ Stellen nur noch $r-1$ Koinzidenzen auftreten dürfen.

Die Formeln (1) bis (6b) stellen Rekursionsformeln dar zur Berechnung der Zahlen $K_0(n, m, r)$.

3. Beziehungen zwischen den einzelnen Grössen

Zwischen den Grössen S_k, B_k und K_k lassen sich folgende Beziehungen herleiten:

$$\sum_{r=0}^{\min(n,m)} K_k(n, m, r) = S_k(n, m)\ ,$$

denn jede Sequenz hat eine eindeutig bestimmte Zahl von Koinzidenzen.

Die Anzahl der vorkommenden Koinzidenzen erhält man einerseits als

$$\sum_{i=1}^{\min(n,m)} B_k(n, m, i, i),$$

andererseits, indem man jede Sequenz mit r Koinzidenzen r-fach zählt. Daher gilt:

$$\sum_{r=1}^{\min(n,m)} r \cdot K_k(n, m, r) = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} B_k(n, m, i, i) .$$

Da bei jedem Wort die i-te Stelle durch genau einen der nach (III) möglichen Buchstaben besetzt wird, gilt für $1 \leq i \leq n$:

$$\sum_{j=ki-k+1}^{m-kn+ki} B_k(n, m, i, j) = S_k(n, m) .$$

Setzt man hier die unter Punkt 2 für die B_k hergeleiteten Ausdrücke ein, so erhält man die folgende Identität:

$$\sum_{j=ki-k+1}^{m-kn+ki} \binom{j-k-(k-1)(i-2)}{i-1} \cdot \binom{m-j-k+1-(k-1)(n-i-1)}{n-i}$$
$$= \binom{m-(k-1)(n-1)}{n} .$$

Ersetzt man hier j durch $j + ki - k + 1$ und m durch $m + kn - k + 1$ sowie anschliessend n durch $n - m$, so erhält man unter Verwendung von

$$\binom{r}{s} = \binom{r}{r-s}$$

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{i+j-1}{i-1} \cdot \binom{n-i-j}{m-j} = \binom{n}{m},$$

eine Formel, die sich anders hergeleitet bei Riordan ([4], p. 7) findet.

Reinhard A. Razen
Montanuniversität Leoben, Österreich

LITERATUR

[1] C. Berge, *Principles of Combinatorics* (Acad. Press, New York and London 1971).
[2] M. Jeger, *Einführung in die Kombinatorik*, Band 1 (Klett, Stuttgart 1973).
[3] I. Kaplansky, Solution of the Problème des ménages, *Bull. Amer. Math. Soc.* 49 (1943), 784–785.
[4] J. Riordan, *Combinatorial identities* (Wiley, New York–London–Sydney 1968).