

Zeitschrift:	Elemente der Mathematik
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	31 (1976)
Heft:	3
Artikel:	Bestimmung von Untergruppen durch Permutationsdarstellungen
Autor:	Bauhoff, Eugen Peter
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-31394

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 31

Heft 3

Seiten 49–80

10. Mai 1976

Bestimmung von Untergruppen durch Permutationsdarstellungen

1. Einleitung

Bekanntlich kann es in einer Gruppe $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \cdot)$ mehrere Untergruppen $\mathfrak{H} = (\mathbf{H}, \cdot)$ geben, zu denen dieselbe disjunkte Restklassenzerlegung

$$\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^r x_i \mathbf{H}$$

gehört.

Ist beispielsweise \mathfrak{G} die von $t_1: (x, y) \rightarrow (x + a, y)$ und $t_2: (x, y) \rightarrow (x, y + b)$ erzeugte Gruppe von Translationen der x - y -Ebene, so gehört zu der von t_1^2 und t_2 erzeugten Untergruppe $\mathfrak{H}_1 = (\mathbf{H}_1, \cdot)$ die Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \mathbf{H}_1 \cup t_1 \mathbf{H}_1$ und zu der von t_1^2 und $t_1 t_2$ erzeugten Untergruppe $\mathfrak{H}_2 = (\mathbf{H}_2, \cdot)$ die Zerlegung $\mathbf{G} = \mathbf{H}_2 \cup t_1 \mathbf{H}_2$. Die Restklassen von \mathbf{G} nach \mathbf{H}_1 bzw. \mathbf{H}_2 werden also in beiden Fällen durch das neutrale Element von \mathfrak{G} und durch t_1 repräsentiert.

Es erhebt sich daher die Frage, wie die Untergruppen \mathfrak{H} von \mathfrak{G} , die zu einer vorgegebenen Restklassenzerlegung gehören, charakterisiert werden können. Antwort hierauf gibt Satz 1, der umgekehrt auch zur Konstruktion von Untergruppen dienen kann. Es handelt sich dabei um die Verwendung von Eigenschaften einer gewissen Permutationsdarstellung von \mathfrak{G} .

Bemerkung: Satz 1 verallgemeinert ein von Wohlfahrt [4], Millington [1] und neuerdings von Newman [2] verwendetes Prinzip zur Konstruktion von Untergruppen in der rationalen Modulgruppe.

2.

Im folgenden bezeichnet \mathfrak{S}_m die Permutationsgruppe der Zahlen $0, 1, \dots, m-1$.

Es seien x_1, x_2, \dots, x_{m-1} beliebige Elemente der Gruppe $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \cdot)$, x_0 sei gleich dem neutralen Element e von \mathfrak{G} .

Wir wollen einen Überblick über die Gesamtheit der Untergruppen $\mathfrak{H} = (\mathbf{H}, \cdot)$ von \mathfrak{G} mit der zugehörigen disjunktten Restklassenzerlegung

$$\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H}$$

gewinnen.

Ist \mathfrak{H} eine solche Untergruppe, so werden die Restklassen $x_0 \mathbf{H}, x_1 \mathbf{H}, \dots, x_{m-1} \mathbf{H}$ durch Linksmultiplikation mit einem beliebigen Element a der Gruppe \mathfrak{G} permutiert. Jedem Element a von \mathfrak{G} entspricht also eine Permutation $\varphi(a) \in \mathfrak{S}_m$, die durch die Bedingungen

$$ax_i \mathbf{H} = x_{\varphi(a)(i)} \mathbf{H} \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, m-1$$

festgelegt ist.

Wir erhalten somit einen Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{S}_m$. Für diesen gilt insbesondere:

$$\varphi(x_i)(0) = i \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Dass umgekehrt zu jedem Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{S}_m$ mit dieser Eigenschaft eine Untergruppe $\mathfrak{H}_\varphi = (\mathbf{H}_\varphi, \cdot)$ der angegebenen Art gehört, besagt der folgende

Satz 1: Die Untergruppen $\mathfrak{H} = (\mathbf{H}, \cdot)$ von $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \cdot)$ mit der zugehörigen disjunkten Restklassenzerlegung

$$\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H}$$

entsprechen umkehrbar eindeutig den Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{S}_m$, die die Bedingungen $\varphi(x_i)(0) = i$ für $i = 0, 1, \dots, m-1$ erfüllen. Für die einem solchen Homomorphismus zugeordnete Untergruppe $\mathfrak{H}_\varphi = (\mathbf{H}_\varphi, \cdot)$ gilt:

$$\mathbf{H}_\varphi = \{g \in \mathbf{G} \mid \varphi(g)(0) = 0\}.$$

Korollar: Es gilt:

$$\text{Kern } (\varphi) = \bigcap_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H}_\varphi x_i^{-1}.$$

Beweis: Sei $\varphi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{S}_m$ ein Homomorphismus, der die im Satz angegebenen Eigenschaften hat. Wir zeigen, dass dann für die Gruppe $\mathfrak{H}_\varphi = (\mathbf{H}_\varphi, \cdot)$ mit

$$\mathbf{H}_\varphi = \mathbf{H} = \{g \in \mathbf{G} \mid \varphi(g)(0) = 0\}$$

die disjunkte Restklassenzerlegung

$$\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H}$$

gilt.

Hierzu sei \mathbf{A} ein beliebiges Erzeugendensystem von \mathfrak{G} und $\mathfrak{H}' = (\mathbf{H}', \cdot)$ die von allen Elementen

$$x_{\varphi(a)(i)}^{-1} ax_i \quad (a \in \mathbf{A}, i = 0, 1, \dots, m-1)$$

erzeugte Gruppe.

Man sieht sofort, dass \mathbf{G} in $\bigcup_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H}'$ enthalten ist. Denn für alle $a \in \mathbf{A}$ ist $ax_i \mathbf{H}' = x_{\varphi(a)(i)} \mathbf{H}'$.

Nach Voraussetzung gilt ferner für $i = 0, 1, \dots, m - 1$, dass $\varphi(x_i)(0) = i$ ist, also ist $\varphi(ax_i)(0) = \varphi(a)(i)$ und somit $\varphi(x_{\varphi(a)(i)}^{-1}ax_i)(0) = 0$ ($a \in \mathbf{A}$). Daher gilt $\varphi(g)(0) = 0$ für alle $g \in H'$.

Ist $g \in x_j \mathbf{H}'$, so ist $\varphi(g)(0) = \varphi(x_j)(0) = j$. Aus $\varphi(g)(0) = 0$ folgt also, dass $g \in \mathbf{H}'$ ist. Somit ist $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$.

Hieraus folgen nun sofort die Disjunktheit der angegebenen Restklassenzerlegung und das Korollar:

Ist nämlich $x_i^{-1}x_j \in \mathbf{H}$, so folgt: $\varphi(x_i^{-1}x_j)(0) = 0$, also $\varphi(x_i)(0) = \varphi(x_j)(0)$, d.h. $i = j$. Die angegebene Restklassenzerlegung ist also disjunkt.

Weiter: Ist $g \in \text{Kern } (\varphi)$, also $\varphi(g)(i) = i$ für $i = 0, 1, \dots, m - 1$, so folgt wegen $i = \varphi(x_i)(0)$:

$$\varphi(g)\varphi(x_i)(0) = \varphi(x_i)(0), \quad \text{also} \quad \varphi(x_i^{-1}gx_i)(0) = 0, \quad \text{also} \quad x_i^{-1}gx_i \in \mathbf{H} \quad \text{für} \\ i = 0, 1, \dots, m - 1. \quad \text{Somit ist } \text{Kern } (\varphi) \subset \bigcap_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H} x_i^{-1}.$$

Ist umgekehrt $g \in x_i \mathbf{H} x_i^{-1}$, also $g = x_i h x_i^{-1}$ mit $h \in \mathbf{H}$, so ist

$$\varphi(g)(i) = \varphi(x_i)\varphi(h)\varphi(x_i^{-1})(i) = \varphi(x_i)\varphi(h)(0) = \varphi(x_i)(0) = i.$$

Daher ist $\bigcap_{i=0}^{m-1} x_i \mathbf{H} x_i^{-1} = \text{Kern } (\varphi)$.

Im Beweis von Satz 1 hat sich zusätzlich ergeben:

Bemerkung: Ist \mathbf{A} ein Erzeugendensystem von \mathfrak{G} , so ist

$$\{x_{\varphi(a)(i)}^{-1}ax_i\} \quad a \in \mathbf{A} \\ i = 0, 1, \dots, m - 1$$

ein Erzeugendensystem von \mathfrak{H} . Seine Bestimmung ist als Reidemeisterverfahren in die Literatur eingegangen. (Siehe etwa [3]).

3. Beispiel

Es sei $\mathfrak{G} = (\mathbf{G}, \cdot)$ die Gruppe von Translationen der x - y -Ebene, die erzeugt wird von $t_1 : (x, y) \rightarrow (x + a, y)$ und $t_2 : (x, y) \rightarrow (x, y + b)$. \mathfrak{G} ist offenbar eine freie abelsche Gruppe von zwei Erzeugenden.

Wir bestimmen alle Untergruppen $\mathfrak{H} = (\mathbf{H}, \cdot)$ von \mathfrak{G} , zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcap_{i=0}^{m-1} t_1^i \mathbf{H}$ gehört.

In der Bezeichnung von Satz 1 ist also $x_i = t_1^i$. Nach diesem Satz entsprechen die betrachteten Untergruppen umkehrbar eindeutig den Homomorphismen $\varphi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{S}_m$ mit der Eigenschaft $\varphi(t_1^i)(0) = i$, d.h. $(\varphi(t_1))^i(0) = i$.

Jeder Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{S}_m$ ist durch die Permutationen $\varphi(t_1) = \tau_1$ und $\varphi(t_2) = \tau_2$ bereits eindeutig bestimmt. Da \mathfrak{G} freie abelsche Gruppe ist, existiert umgekehrt zu je zwei vertauschbaren Permutationen $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_m$ genau ein Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{S}_m$ mit $\varphi(t_1) = \tau_1, \varphi(t_2) = \tau_2$. Wir können daher in diesem Fall den Satz wie folgt formulieren:

Die Untergruppen \mathfrak{H} von \mathfrak{G} , zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} t_1^i \mathbf{H}$ gehört, entsprechen umkehrbar eindeutig den Paaren (τ_1, τ_2) von Permutationen aus \mathfrak{S}_m mit der Eigenschaft $\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1$ und $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \dots, m-1$.

Welche Permutationen kommen für τ_1 und τ_2 in Frage?

Wegen $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \dots, m-1$ ist τ_1 eindeutig bestimmt, und zwar ist $\tau_1 = (0, 1, \dots, m-1)$.

Es sei $\tau_2(0) = k$. Dann ergibt sich wegen der Vertauschbarkeit von τ_1 und τ_2 notwendig:

$$\tau_2(i) = \tau_2 \tau_1^i(0) = \tau_1^i \tau_2(0) = \tau_1^i(k) = \tau_1^i \tau_1^k(0) = \tau_1^k \tau_1^i(0) = \tau_1^k(i).$$

Also ist $\tau_2 = \tau_1^k$. τ_2 ist daher durch die Zahl k bereits eindeutig bestimmt. Es ist klar, dass umgekehrt k beliebig vorgeschrieben werden kann.

Die Paare (τ_1, τ_2) von Permutationen aus \mathfrak{S}_m mit den Eigenschaften $\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1$ und $\tau_1^i(0) = i$ für $i = 0, 1, \dots, m-1$ entsprechen also umkehrbar eindeutig den Zahlen k mit $0 \leq k \leq m-1$.

Zusammengefasst erhalten wir also folgendes Ergebnis:

Satz 2: Es gibt genau m Untergruppen $\mathfrak{H}_k = (\mathbf{H}_k, \cdot)$ von \mathfrak{G} , zu denen die disjunkte Restklassenzerlegung $\mathbf{G} = \bigcup_{i=0}^{m-1} t_1^i \mathbf{H}_k$ gehört ($k = 1, \dots, m$).

Ein Erzeugendensystem für \mathfrak{H}_k kann leicht mit Hilfe des Korollars angegeben werden:

\mathfrak{H}_k wird erzeugt von den Elementen $t_1^{-\tau_1(i)} t_1 t_1^i$ und $t_1^{-\tau_2(i)} t_2 t_2^i$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$). Wegen $\tau_1(i) = i+1$ für $0 \leq i \leq m-2$, $\tau_1(m-1) = 0$ und $\tau_2(i) \equiv i+k \pmod{m}$ folgt:

Korollar: \mathfrak{H}_k wird erzeugt von t_1^m und $t_1^{-k} t_2$.

Eugen Peter Bauhoff,
Universität Mannheim, BRD

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] MILLINGTON, M. H., *Subgroups of the Classical Modular Group*, J. London Math. Soc. 1, 351–357 (1969).
- [2] NEWMAN, M., *Formulas and Multiplicative Relationships for the Parameters of Subgroups of the Modular Group*, Math. Ann. 212, 173–182 (1974).
- [3] REIDEMEISTER, K., *Knoten und Gruppen*, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 5, 7–23 (1927).
- [4] WOHLFAHRT, K., *On some Representations of $Sl(2, \mathbb{Z})$* , Ill. J. Math. 15, 144–149 (1971).

Zwei Abzählprobleme über Sequenzen mit Zeichen aus einem gegebenen Alphabet

1. Problemstellung

Es sei ein Alphabet von m Zeichen (Buchstaben) A_1, A_2, \dots, A_m gegeben. Bildet man nach geeigneten Vorschriften aus diesem Alphabet n -stellige Sequenzen (Wörter