

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 30 (1975)  
**Heft:** 6  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

for  $r = 1, 2, 3, \dots, \varphi(k)$ ; where

$$s_r = \sum_{\substack{1 \leq h \leq k \\ (h, k) = 1}} \zeta^{hmr}.$$

But by (7),  $s_r$  turns out to be  $C_k(mr)$ , so that (15) turns out to be

$$\left. \begin{aligned} C_k(mr) - T_1^{(m)} C_k(mr - m) + T_2^{(m)} C_k(mr - 2m) - \dots \\ + (-1)^{r-1} T_{r-1}^{(m)} C_k(m) + (-1)^r r T_r^{(m)} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

for  $r = 1, 2, 3, \dots, \varphi(k)$ .

Using (16), we can express  $T_1^{(m)}, T_2^{(m)}, \dots, T_{\varphi(k)}^{(m)}$  successively in terms of  $C_k(m), C_k(2m), \dots, C_k(\varphi(k)m)$ . In particular, when  $m = 1$ , we can express the values of the elementary symmetric functions of the primitive  $k$ -th roots of unity in terms of the values of the Möbius  $\mu$ -function. This is exactly what we have done in establishing the congruences (12) and (13).

D. Suryanarayana, Andhra University, Waltair, India

#### REFERENCES

- [1] S. BARNARD and J. M. CHILD, *Higher Algebra* (Macmillan and Company, Limited, London, 1949).
- [2] A. CZARNOTA, *Congruences Satisfied by a Sum of Powers of Primitive Roots with Respect to a Prime Modulus* (Polish, Russian and English summaries), *Prace. Mat.* 8, 131–142 (1963/64), M. R. 30, 1964.
- [3] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Fourth edition (Clarendon Press, Oxford, 1960).
- [4] T. NAGELL, *Introduction to Number Theory* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1951).

## Aufgaben

**Aufgabe 729.** If  $A, B, C$  denote the angles of an arbitrary triangle, then it is known (cf., e.g., O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Groningen 1968, p. 120) that the three triples  $(\sin A, \sin B, \sin C)$ ,  $(\cos A/2, \cos B/2, \cos C/2)$ ,  $(\cos^2 A/2, \cos^2 B/2, \cos^2 C/2)$  are sides of three triangles. Give a generalization which includes the latter three cases as special cases.

M. S. Klamkin, Dearborn, Michigan, USA

*Erste Lösung:* Ist  $M$  ein Punkt der Ebene des Dreiecks, so gilt nach der ptolemäischen Ungleichung für die Eckpunkte  $Q, R, S$ :

$$\overline{MQ} \cdot \overline{RS} \leq \overline{MR} \cdot \overline{SQ} + \overline{MS} \cdot \overline{QR} \quad (1)$$

sowie die durch zyklische Vertauschung von  $Q, R, S$  entstehenden Ungleichungen. Das Tripel  $(\overline{MQ} \cdot \overline{RS}, \overline{MR} \cdot \overline{SQ}, \overline{MS} \cdot \overline{QR})$  stellt also die Seitenlängen eines Dreiecks dar.

ecks dar. Die drei in der Aufgabe genannten Tripel ergeben sich aus (1) für  $M = O$  (Umkreismittelpunkt),  $M = I$  (Inkreismittelpunkt) und  $M = P$ , wobei  $P$  durch

$$PQ/(s-a) = \overline{PR}/(s-b) = \overline{PS}/(s-c) = k, \quad a = \overline{RS}, \quad b = \overline{SQ}, \quad c = \overline{QR}$$

definiert ist; die Existenz von  $P$  lässt sich leicht beweisen.

G. Bercea, München, BRD

*Lösung des Aufgabenstellers:* We show more generally that  $F(A)$ ,  $F(B)$ ,  $F(C)$  are sides of a triangle where  $F(\theta) \equiv u(\sin \theta/n + \sin \pi/n) + v(\cos \theta/n - \cos \pi/n)$  for all  $u, v \geq 0$  and  $n \geq 1$ . It suffices to show that

$$\min_{A+B+C=\pi} \{F(B) + F(C) - F(A)\} \geq 0$$

which will follow from

$$\min \{\sin B/n + \sin C/n - \sin A/n + \sin \pi/n\} = 0, \quad (1)$$

$$\min \{\cos B/n + \cos C/n - \cos A/n - \cos \pi/n\} = 0. \quad (2)$$

The expression in (1) can be rewritten as

$$2 \sin \frac{B+C}{2n} \cos \frac{B-C}{2n} - \sin \frac{A}{n} + \sin \frac{\pi}{n}.$$

For fixed  $A$ , the first term is a minimum for either  $B$  or  $C = 0$ . Then the latter expression reduces to

$$2 \sin \frac{B-A}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{\pi}{n}$$

whose minimum value 0 is taken on for  $B = 0$ ,  $A = \pi$ . The minimum of (2) is established similarly.

The three known special cases correspond to values  $n = 1, v = 0$ ;  $n = 2, u = 0$ ; and  $n = 1, u = 0$ ; respectively. Another simple case occurs for  $n = 2, v = 0$ .

Since the maximum values of  $\sin B/n + \sin C/n$  and  $\cos B/n + \cos C/n$ , for fixed  $A$ , are taken on for  $B = C$ , it then follows easily that

$$\max \{\sin B/n + \sin C/n - \sin A/n\} = 2 \sin \pi/2n, \quad (3)$$

$$\max \{\cos B/n + \cos C/n - \cos A/n\} = 2 - \cos \pi/n. \quad (4)$$

Eine weitere Lösung sandte Hj. Stocker (Wädenswil ZH).

**Aufgabe 730.** Man beweise: Sind  $a, b, c, d, e, f$  reelle Zahlen mit den Eigenschaften

$$ac + bd = ef, \quad (1)$$

$$(ad + bc)f = (ab + cd)e, \quad (2)$$

so gilt

$$\begin{aligned} & [a b e (c + d + e) + c d e (a + b + e)] (b + c + f) (a + d + f) \\ & = [b c f (a + d + f) + a d f (b + c + f)] (a + b + e) (c + d + e). \end{aligned} \quad (3)$$

Für positive  $a, b, c, d, e, f$  interpretiere man (1), (2), (3) geometrisch.

G. Bercea, München, BRD

*Lösung:* Setzen wir (1) und (2) voraus.

Die linke Seite von (3) lässt sich schreiben als Produkt von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , wobei

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= a b (c + d + e) + c d (a + b + e), \\ \varphi_2 &:= e (b + c + f) (a + d + f). \end{aligned}$$

Eine entsprechende Zerlegung der rechten Seite von (3) in die Faktoren  $\psi_1$  und  $\psi_2$  liegt vor, wobei  $\psi_i$  aus  $\varphi_i$  entsteht durch Anwendung der Permutation

$$(a \ b \ c \ d \ e \ f) \rightarrow (c \ b \ a \ d \ f \ e). \quad (i = 1, 2).$$

Nun gilt

$$\varphi_1 = a c (b + d) + b d (a + c) + e (a b + c d)$$

(infolge (2))

$$= a c (b + d) + b d (a + c) + f (a d + b c) = \psi_1$$

und somit

$$\varphi_2 = e (a b + a c + a f + b d + c d + d f + b f + c f + f^2)$$

(infolge (1))

$$= e (a b + c d) + e f (a + b + c + d + e + f)$$

(infolge (2))

$$= f (a d + b c) + e f (a + b + c + d + e + f) = \psi_2.$$

Deshalb gilt  $\varphi_1 \varphi_2 = \psi_1 \psi_2$  und ist (3) bewiesen.

Geometrisch sind (1) und (2) bekannte Identitäten in einem Sehnenviereck  $P_1 P_2 P_3 P_4$  mit Seiten  $a, b, c$  und  $d$  und Diagonalen  $e$  und  $f$  (Sätze von Ptolemaios und Brahmagupta). Bezeichnen wir dessen Umkreisradius mit  $R$ , und die Inkreisradien, Umfänge, Seitenprodukte und Flächeninhalte der Dreiecke  $P_i P_j P_k$  mit  $r_l, 2s_l, \pi_l$  bzw.  $F_l$  ( $i, j, k, l$  alle verschieden), so gilt

$$r_l = \frac{F_l}{s_l} = \frac{\pi_l}{4 R s_l} \quad (l = 1, 2, 3, 4).$$

Für  $a = \overline{P_1 P_2}$ ,  $b = \overline{P_2 P_3}$ ,  $c = \overline{P_3 P_4}$ ,  $d = \overline{P_4 P_1}$ ,  $e = \overline{P_1 P_3}$ ,  $f = \overline{P_2 P_4}$  lässt sich (3) schreiben in der Form

$$(2s_2 \pi_4 + 2s_4 \pi_2) 4s_1 s_3 = (2s_1 \pi_3 + 2s_3 \pi_1) 4s_2 s_4,$$

woraus unmittelbar folgt

$$\mathbf{r}_4 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 .$$

O. P. Lossers, Eindhoven, Niederlande

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küschnacht ZH), L. Hämmerling (Aachen, BRD), M. S. Klamkin (Waterloo, Ontario, Canada), I. Paasche (München, BRD) und M. Vowe (Therwil BL).

**Aufgabe 731.** Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\zeta(n+1)}{n+2} = 1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) ,$$

where  $\gamma$  is Euler's constant defined by  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/2 + \dots + 1/n - \ln n)$  and

$\zeta$  is the Riemann zeta function defined by  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$  for  $s > 1$ .

D. Suryanarayana, Waltair, India

*Lösung:* Die linke Seite der behaupteten Gleichung sei mit  $s$  bezeichnet. Setzen wir die Reihe für  $\zeta(n+1)$  ein und vertauschen die Reihenfolge der Summationen (die Doppelreihe gestattet die Vertauschung), so haben wir

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} s_k$$

mit

$$s_k := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2} k^{-(n+1)} = k \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) - 1 + \frac{1}{2k} .$$

Wir summieren über  $k$  von 1 bis  $m \in \mathbb{N}$  und addieren  $\pm (1/2) \ln m$ . Das ergibt

$$\begin{aligned} s &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^m \left[ k \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) - 1 \right] + \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} - \ln m \right) \right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \ln \left\{ e^{-m} \sqrt{m} \prod_{k=1}^m \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k \right\} + \frac{\gamma}{2} . \end{aligned}$$

Nach der Stirlingschen Formel ist nun

$$e^{-m} \sqrt{m} = m! m^{-m} (2\pi)^{-1/2} e^{-\theta/12m}, \quad 0 < \theta < 1 .$$

Damit wird

$$s = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \ln \prod_{k=1}^m \frac{k}{m} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^k - \frac{\theta}{12m} \right\} + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) .$$

Es ist aber

$$\prod_{k=1}^m \frac{k}{m} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m ,$$

also strebt der Inhalt der geschweiften Klammer für  $m \rightarrow \infty$  nach 1, q. e. d.

H. Kappus, Rodersdorf SO

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig, BRD), E. Braune (Linz, Österreich), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Hämmerring (Aachen, BRD), M. S. Klamkin (Waterloo, Ontario, Canada), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), Chr. A. Meyer (Bern) und M. Vowe (Therwil BL).

*Anmerkung:* E. Braune beweist allgemeiner

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\zeta(n+s-1)}{n+s} = (-1)^s \left(1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi) - U_s\right) \quad (s \geq 2 \text{ ganz}) ,$$

wobei

$$U_2 = 0, \quad U_s = \sum_{k=3}^s (-1)^{k-1} \frac{\zeta(k-1)}{k} \quad \text{für } s \geq 3 .$$

**Aufgabe 732.** Es sei  $f$  eine der zahlentheoretischen Funktionen  $\varphi, \sigma, \tau$ . Man zeige, dass es a) für jedes positive reelle  $c$  unendlich viele natürliche Zahlen  $n$  derart gibt, dass gilt:

$$(1+c)^{n-i} f(n-i) < (1+c)^n f(n) < (1+c)^{n+j} f(n+j) \quad \text{für alle } i, j \in N; i < n,$$

b) für jedes natürliche  $k$  nur endlich viele natürliche Zahlen  $n$  derart gibt, dass gilt:

$$(n-i)^k f(n-i) < n^k f(n) < (n+j)^k f(n+j) \quad \text{für alle } i, j \in N; i < n .$$

P. Erdős, Budapest

*Solution by the proposer:* First observe that if  $f(n)$  is one of the functions  $d(n)$ ,  $\sigma(n)$  or  $\varphi(n)$  then for every  $k$  there can be only a finite number of values of  $n$  for which for every  $1 \leq i < n$

$$(n-i)^k f(n-i) < n^k f(n) < (n+i)^k f(n+i) . \quad (1)$$

Let first  $f(n) = d(n)$ . If  $d(n) \geq 2^{k+1}$  then let  $p$  be any prime satisfying  $n < p < 2n$  and the second inequality of (1) is clearly not satisfied. If  $d(n) < 2^{k+1}$  then let  $m$  be any integer in  $(n/2, n)$  having more than  $2k+1$  distinct prime factors (for large enough  $n$  such an  $m$  exists).  $m$  clearly does not satisfy the first inequality of (1). Similar arguments work for  $\sigma(n)$  and  $\varphi(n)$ .

Next we prove that for every  $c > 0$  there are infinitely many values of  $n$  for which for every  $1 \leq i \leq n$

$$(1+c)^{n-i} f(n-i) < (1+c)^n f(n) < (1+c)^{n+i} f(n+i) . \quad (2)$$

We only prove (2) for  $f(n) = d(n)$  which is the most difficult case, and for simplicity we take  $c = 1$ . It will be clear from our proof that this is not an essential restriction. The proof of (2) is not entirely simple and we suppress some details.

Let  $p_1 = 2 < p_2 < \dots$  be the sequence of consecutive primes.  $u_1$  is the product of the first  $k$  primes and

$$u_i = \prod p_j, \quad 2i-1 < j \leq 2i+1, \quad 2 \leq i \leq 2k. \quad (3)$$

Thus  $d(u_1) = 2^k$ ,  $d(u_i) = 2^{2k}$ . Determine  $n$  by the congruences

$$n + i \equiv 0 \pmod{u_{i+1}}, \quad 0 \leq i \leq 2k-1. \quad (4)$$

Put  $\prod_{i=1}^{2k} u_i = \prod_{j=1}^t p_j = A_t$ ,  $t = 4k^2 - k$ . By the prime number theorem (or by a

much more elementary result) for  $k > k_0$

$$A_t < \exp k^3 \quad (\exp z = e^z). \quad (5)$$

Clearly the congruences (4) determine  $n$  uniquely mod  $A(t)$ . Put

$$n = x + yA(t), \quad 0 \leq y \leq A(t). \quad (6)$$

We shall show that for at least one choice of  $y$  (2) will be satisfied. We prove the existence of such a  $y$  by a simple averaging process. First of all we have by well known arguments

$$\sum_{y=0}^{A(t)} d(x + yA(t)) \leq 2^k \cdot 2 \sum_{r=1}^{A(t)} \left( \frac{A(t)}{r} + 1 \right) < A(t) 2^{k+2} \log A(t). \quad (7)$$

The factor  $2^k$  comes from  $d(u_1) = 2^k$ ,  $x + yA(t) \equiv 0 \pmod{u_1}$ . Thus from (7) and (5) we obtain that for all but

$$\frac{4A(t) \log A(t)}{2^k} < \frac{4A(t) k^3}{2^k} < \frac{A(t)}{k} \quad (\text{for } k > k_0) \quad (8)$$

values of  $y$  ( $0 \leq y \leq A(t)$ )

$$d(x + yA(t)) < 2^{2k}. \quad (9)$$

For the  $y$ 's satisfying (9) the second inequality of (2) is clearly satisfied for all  $i > 0$ , we have  $d(n) \leq 2^{2k}$ ,  $d(n+i) > 2^{2k}$  for  $1 \leq i \leq 2k-1$ .

By a similar averaging process as used in (7) we obtain that for all but  $A(t)/k$  values of  $y$ ,  $0 \leq y \leq A(t)$ , we have for all  $i < n$

$$d(n+i) < 2^{k+i}, \quad n = x + yA(t).$$

Thus for all but  $2A(t)/k$  values of  $y$  (2) is satisfied, which completes our proof.

By more complicated methods we can prove that the density of integers  $n$  satisfying (2) for  $f(n) = d(n)$  is  $g(c)$  where  $g(c)$  is a certain continuous function of  $c$ ,  $g(1) = 0$ ,  $g(\infty) = 1$ . The density of integers  $n$  satisfying (2) for  $f(n) = \sigma(n)$  and  $f(n) = \phi(n)$  is 1 for every  $c > 0$ .

## Neue Aufgaben

Die Lösungen der Aufgaben bis und mit Nr. 756 sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten an **Prof. Dr. J. Rätz** bis **10. Juni 1976**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

**Aufgabe 753.**  $M$  sei eine Menge, und  $E(M)$  sei die Menge aller endlichen Teilmengen von  $M$ . Ferner sei  $K$  ein Körper, und  $R$  sei die Menge aller Abbildungen von  $E(M)$  in  $K$ . Definiert man für  $f, g \in R$  die Summe  $f + g$  durch  $(f + g)(X) = f(X) + g(X)$  für alle  $X \in E(M)$  und das Produkt  $fg$  durch  $(fg)(X) = \sum_{Y \subset X} f(Y)g(X-Y)$  für alle  $X \in E(M)$ , so ist  $R(+, \cdot)$  ein Ring mit 1. Dabei ist die Eins die durch  $e(\emptyset) = 1$  und  $e(X) = 0$  für  $X \neq \emptyset$  definierte Abbildung  $e$ . Man rechnet leicht nach, dass die Menge  $I$  aller  $f \in R$ , für die  $f(\emptyset) = 0$  ist, ein Ideal von  $R$  ist. Zeige: Ist  $I = Rf_1 + \dots + Rf_n$  mit  $f_i \in I$ , so ist  $M$  endlich, und es gilt  $|M| \leq n$ . Insbesondere folgt also, dass  $I$  nicht endlich erzeugt ist, wenn  $M$  unendlich ist.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

**Aufgabe 754.** Es seien  $K_1, K_2, K_3$  drei Kegelschnitte einer Ebene mit insgesamt 12 verschiedenen Schnittpunkten  $S$ . Ein beliebiger, auf keiner dieser Kurven liegender Punkt  $X$  der Ebene bestimmt mit den vier nicht auf  $K_i$  liegenden Punkten  $S$  je einen Kegelschnitt  $\bar{K}_i$ . Man zeige: Die drei Kurven  $\bar{K}_i$  haben ausser  $X$  noch drei weitere gemeinsame Punkte.

C. Bindschedler, Küsnacht ZH

**Aufgabe 755.** Für ganzzahlige Indizes  $n, k$  mit  $n \geq 0$  seien die Zahlen  $T(n, k)$  definiert durch

$$T(0, k) = 0 \quad (k \neq 0), \quad T(0, 0) = 1, \\ T(n, k) = T(n-1, k-1) + (k+1) T(n-1, k) \quad (n \geq 1).$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 3 & 1 & \\ & & & 1 & 7 & 6 & 1 \\ & & & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\ & & & & \dots & & \end{array}$$

$(S(n, k) = T(n-1, k-1))$  heisst die zu  $n$  und  $k$  gehörige Stirlingsche Zahl zweiter Art.) Die von 0 verschiedenen  $T(n, k)$  lassen sich dann entsprechend einem Pascalschen Dreieck anordnen. Notiert man in diesem Zahlendreieck nur die Reste der  $T(n, k)$  modulo 2, so können Blöcke von aufeinanderfolgenden Ziffern 0 und 1 innerhalb der Zeilen als Dualdarstellungen nichtnegativer ganzer Zahlen aufgefasst werden.

Kann eine kleinste natürliche Zahl angegeben werden, deren Dualdarstellung nicht als Teilblock irgendeiner Zeile vorkommt?

H. Harborth, Braunschweig, BRD

**Aufgabe 756.** Eine Transversale  $t$  von der Ecke  $A$  aus teile das ebene Dreieck  $ABC$  in zwei Teildreiecke mit gleichem Inkreisradius  $\varrho$ . Man beweise  $1 = 2\varrho/h_a + \sqrt{r/r_a}$ , worin  $h_a$  Höhe,  $r$  Inkreisradius und  $r_a$  Ankreisradius von  $ABC$  bezeichnen. Ferner zeige man, dass  $w_a \leq t \leq m_a$  mit Gleichheit genau für  $b = c$ . Dabei ist  $w_a$  die Winkelhalbierende des Dreieckswinkels bei  $A$  und  $m_a$  die von  $A$  ausgehende Schwerlinie.

I. Paasche, München, BRD

## Literaturüberschau

*Quasiconformal Mappings in the Plane.* Von O. LEHTO und K. I. VIRTANEN. 2nd ed. VIII, 258 Seiten. 15 Figuren. DM 67,50. Springer, Berlin 1973.

Quasikonforme Abbildungen sind eine Verallgemeinerung der konformen oder winkeltreuen Abbildungen: Winkel können dabei, wie bei affinen Abbildungen (die auch quasikonform sind), verändert werden, aber nicht zu stark. Anders ausgedrückt: Eine quasikonforme Abbildung führt infinitesimale Kreise in infinitesimale Ellipsen mit beschränktem Halbachsenverhältnis (Dilatation) über. Aus der Beschränktheit der infinitesimalen Verzerrung folgt die Beschränktheit der Verzerrung im Grossen, und heute bezeichnet man nach einer Idee von Ahlfors und Pfluger als quasikonforme Abbildungen allgemein solche Homöomorphismen, die den konformen Modul von Jordanvierecken nur beschränkt verändern. Sie brauchen nicht überall differenzierbar zu sein und sind homöomorphe Lösungen eines Beltramischen Differentialgleichungssystems (verallgemeinerte Cauchy-Riemann-Gleichungen).

Das Buch von Lehto und Virtanen, eine freie aber inhaltsgetreue Übersetzung ihres früheren Werkes (Quasikonforme Abbildungen, Springer-Verlag 1965; die rasche Entwicklung der Theorie der quasikonformen Abbildungen in  $n$  Dimensionen hat den Zusatz «in the plane» bewirkt), stellt diese Theorie in ausgezeichneter Weise dar. Ausgehend von der ursprünglichen Definition (stetige Differenzierbarkeit mit Beschränktheit der infinitesimalen Verzerrung, was man heute reguläre quasikonforme Abbildungen nennt), über die sog. geometrische Definition, die Beschränktheit der Verzerrung von Jordanvierecken, werden eine Reihe von Sätzen, wie z.B. der berühmte Satz von Beurling und Ahlfors über die Randwerte quasikonformer Selbstabbildungen der Halbebene (quasisymmetrische Funktionen) bewiesen. Im vierten Kapitel folgt, nach einem sehr schönen Abschnitt über die benötigten Hilfsmittel aus der reellen Analysis, die analytische Definition. Diese wird schliesslich in einem weiteren Hauptteil zu einer originellen Integration der Beltrami-Gleichung verwendet.

Vor bald fünfzig Jahren hat Herbert Grötzsch, heute emeritierter Professor in Halle an der Saale, in einer kaum fünf Seiten langen Arbeit mit dem Titel «Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes» die quasikonformen Abbildungen eingeführt. Der Name erscheint zum erstenmal bei Ahlfors in seiner berühmten Arbeit «Zur Theorie der Überlagerungsflächen», 1935. Etwas später sind die sog. extremalen quasikonformen Abbildungen (möglichst konformen Abbildungen, wie Grötzsch sie nannte) durch die genialen Einsichten von Oswald Teichmüller mit den quadratischen Differentialen in Zusammenhang gebracht und zur Lösung des Modulproblems der Riemannschen Flächen verwendet worden, was zu den Teichmüllerschen Räumen führte. Es gibt hier noch eine Menge ungelöster Probleme, die zwar im Buch von Lehto und Virtanen nicht zur Sprache kommen, zu denen es aber einen sehr lesbaren Zugang vermittelt.

K. STREBEL

*ALGOL Handbuch für Anfänger.* Von HERMANN MEIER. 29 Seiten. DM 8,80. Bayerischer Schulbuch-Verlag, München 1973.