

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	30 (1975)
<b>Heft:</b>	6
<b>Artikel:</b>	Zur Startbewegung der elastisch aufgehängten Kreisscheibe
<b>Autor:</b>	Braunbek, Werner
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-30654">https://doi.org/10.5169/seals-30654</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 30

Heft 6

Seiten 121–144

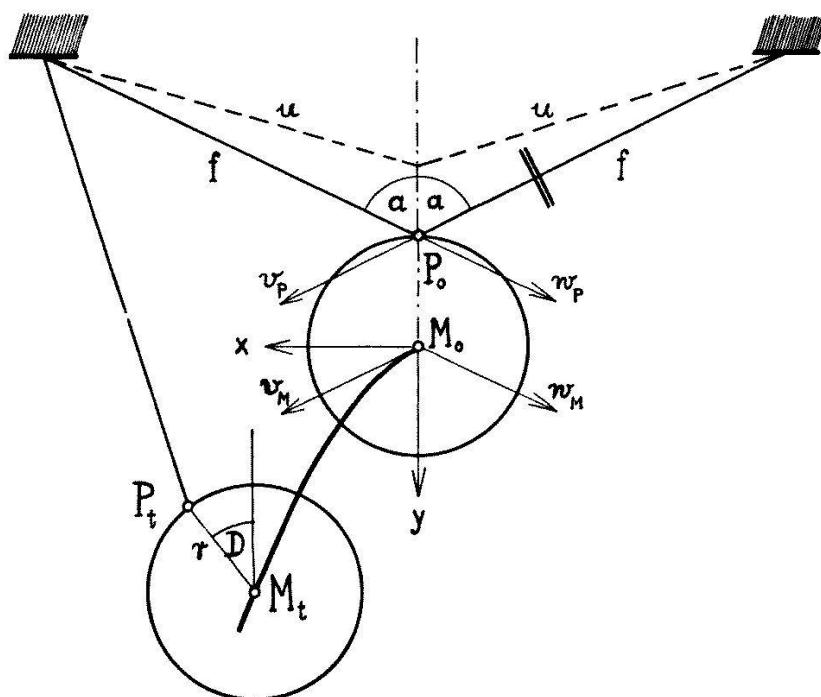
10. November 1975

## Zur Startbewegung der elastisch aufgehängten Kreisscheibe

### 1. Einleitung

Die erstmals von E. T. Whittaker [1] behandelte Aufgabe verlangt die Bestimmung des Anfangskrümmungsradius der Bahnkurve des Mittelpunkts  $M$  einer an zwei masselosen, elastischen Saiten symmetrisch aufgehängten Kreisscheibe (Abb.) mit radialsymmetrischer Massenverteilung<sup>1)</sup>, wenn zur Zeit  $t = 0$  die eine Saite durchschnitten wird. I. Paasche [2] stellte fest, dass später noch eine zweite Behandlung dieser Aufgabe erfolgte [3], die indes zu einem um einen Faktor 2 verschiedenen Ergebnis führte. Er löste dann [2] die Aufgabe selbst nach einem neuen Verfahren und fand ein Resultat, das nochmals einen anderen Faktor, nämlich 3, aufweist.

Im folgenden wird das Problem in wieder anderer Form, nach der Methode der sukzessiven Näherungen, gelöst. Das Ergebnis von I. Paasche [2] wird bestätigt, doch ist der Rechengang physikalisch durchsichtiger und wesentlich kürzer. Die 0. Näherung liefert die Anfangstangente der Bahnkurve, die 1. Näherung die Anfangskrümmung, beide natürlich exakt trotz des Ausdrucks «Näherung»; weiter braucht man bei der vorliegenden Fragestellung nicht zu gehen. Das Verfahren kann



Veranschaulichung des Scheiben-Problems mit den wichtigsten Bezeichnungen.

<sup>1)</sup> Die ursprünglich für eine homogene Kreisscheibe gestellte Aufgabe wird hier gleich auf eine radialsymmetrische verallgemeinert.

an sich im rechtwinkligen KS ( $x, y$ ) (siehe Fig.) durchgeführt werden, man gelangt aber noch rascher zum Ziel in dem schiefwinkligen KS ( $v, w$ ), dessen Achsen zu den gespannten Saiten des Ausgangszustandes parallel sind. Zweckmäßig führt man für die Punkte  $M$  und  $P$  zwei getrennte KS mit parallelen Achsen ein (siehe Fig.).

## 2. Bezeichnungen

Die aus dem Bild ersichtlichen Bezeichnungen werden nicht mehr wiederholt.  $u$  ist die Länge der ungespannten Saiten, die die Federkonstante  $k$  haben,  $g$  Schwerkraft,  $m$  Masse der Scheibe,  $J = mg^2$  Trägheitsmoment um die Mittelpunktsachse,  $\rho$  Trägheitsradius. Die Kräfte und die Verschiebungen der Punkte  $M$  bzw.  $P$  der Scheibe in 0. Ordnung werden mit  $F, v, w$ , die Zusatzkräfte und Zusatzverschiebungen, die in 1. Ordnung hinzukommen, mit  $F', v', w'$  bezeichnet, wobei die Indizes  $M$  und  $P$  die Zugehörigkeit zu den Punkten angeben. Die Kräfte werden in ihre Komponenten  $F_v$  und  $F_w$  im KS ( $v, w$ ) zerlegt. Wegen ihres häufigen Auftretens werden für die folgenden Ausdrücke Abkürzungen eingeführt:

$$\sin \alpha = s, \cos \alpha = c, \sin 2\alpha = s_2, \cos 2\alpha = c_2, \sin 4\alpha = s_4.$$

## 3. Durchführung der sukzessiven Näherung

Die Anfangs-Spannung in jeder der beiden Saiten ist  $k(f - u)$ . Das ursprüngliche Gleichgewicht erfordert also:

$$\frac{mg}{2c} = k(f - u), \quad (1)$$

was aber weiterhin nicht mehr gebraucht wird. Da im Gleichgewicht nämlich die Resultierende der 3 Kräfte Null ist, wird, wenn im Augenblick  $t = 0$  die Saite rechts durchschnitten wird, die neue Resultierende der 2 verbleibenden Kräfte einfach gleich der wegfallenden Kraft der rechten Saite in entgegengesetzter Richtung. Es wirkt für  $t = 0$  daher auf die Scheibe

$$\left. \begin{array}{ll} \text{die Kraft:} & \left\{ \begin{array}{l} F_v = k(f - u) \\ F_w = 0 \end{array} \right. \\ \text{das Drehmoment:} & M = rsF_v \\ & (\text{um } M; \text{ Hebelarm } rs). \end{array} \right\} \quad (2)$$

Diese Kräfte werden in 0. Näherung als konstant betrachtet. Sie führen zu Verschiebungen  $v_M, w_M$  des Punktes  $M$  und zu einer Drehung  $D$ , alle proportional  $t^2$ . Die hieraus sich ergebenden Verschiebungen  $v_P, w_P$  des Punktes  $P$  bewirken durch Richtungs- und Längenänderung der linken Saite in 1. Näherung Zusatzkräfte  $F'_v, F'_w$  ebenfalls proportional  $t^2$ . Das ausserdem entstehende Zusatzdrehmoment  $M'$  braucht nicht mehr berechnet zu werden, da für das Endresultat nur die Bewegung des Scheibenmittelpunkts interessiert. Aus  $F'_v, F'_w$  ergeben sich die Zusatzverschiebungen 1. Ordnung  $v'_M, w'_M$ , proportional  $t^4$ . Von ihnen braucht man nur  $w'_M$ , weil  $v'_M$  gegen  $v_M$  in der Grenze  $t \rightarrow 0$  verschwindet, während wegen  $w_M = 0$  [siehe (3)] das  $t^4$ -proportionale  $w'_M$  das niedrigste Glied ist.

Aus (2) kommt nach den Grundgesetzen der Dynamik:

$$\left. \begin{aligned} v_M &= \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{m} (f - u) t^2 = C_v t^2 \\ w_M &= 0 \quad (\text{d.h. Bahntangente in } M_0 \text{ ist die } v_M\text{-Achse}) \\ D &= \frac{1}{2} \cdot \frac{rs}{J} k (f - u) t^2 = \frac{mrs}{J} C_v t^2 = \frac{rs}{\varrho^2} C_v t^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Aus  $v_M$  und  $D$  folgen  $v_p$  und  $w_p$ , hieraus die Zusatzkraft  $F'_w \sim t^2$  ( $F'_v$  braucht man nicht), und aus ihr die Zusatzverschiebung

$$w'_M = \frac{1}{m} \iint_{t=0}^t F'_w dt dt = C_w t^4. \quad (4)$$

Die gesamten zu berücksichtigenden Verschiebungen des Scheibenmittelpunktes sind nun  $v_M$  nach (3) und, wegen  $w_M = 0$ ,  $w'_M$  nach (4). Elimination von  $t$  ergibt aus ihnen die Näherungsparabel der Bahnkurve im Ursprung

$$w = \frac{C_w}{C_v^2} v^2 \quad (5)$$

mit ihrem Nullpunkts-Krümmungsradius

$$R = \frac{C_v^2}{2C_w s_2}. \quad (\text{positiv bei Krümmung wie in der Figur}) \quad (6)$$

Der Faktor  $s_2$  im Nenner röhrt vom schiefwinkligen KS her. Die einzige etwas umständlichere Rechnung ist nun nur noch die Ermittlung der Grösse  $C_w$  aus (4). Das  $C_v$  ist in der ersten der Gleichungen (3) definiert. In der Tatsache, dass  $w_M$  Null wird und dass man dadurch sofort die Gleichung (5) der Näherungsparabel erhält, liegt der Vorteil des schiefwinkligen KS.

#### 4. Berechnung von $C_w$

Die Verschiebung 0. Ordnung des Punktes  $P$  setzt sich aus der Verschiebung  $v_M$  des Punktes  $M$  und einer von der Drehung  $D$  herrührenden horizontalen Verschiebung um  $rD$  zusammen, deren Komponenten nach  $v$  und  $w$   $rD/2s$  und  $-rD/2s$  sind. Mit  $v_M$  und  $D$  nach (3) ergibt sich daher die Verschiebung von  $P$  zu:

(Abkürzung  $\alpha = r^2/2\varrho^2$ )

$$\left. \begin{aligned} v_P &= v_M \left( 1 + \frac{r^2}{2\varrho^2} \right) = (1 + \alpha) v_M \\ w_P &= -\frac{r^2}{2\varrho^2} v_M = -\alpha v_M. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Bezeichnet  $\Delta f$  die Verlängerung,  $\Delta a$  die Richtungsänderung (Zunahme des Winkels  $a$ ) der Saite infolge der Verschiebung 0. Ordnung des Punktes  $P$ , so ist:

$$\left. \begin{aligned} \Delta f &= c_2 v_P + w_P = [c_2 - \alpha(1 - c_2)] v_M = (c_2 - 2\alpha s^2) v_M \\ \Delta a &= -\frac{s_2 v_P}{f} = -\frac{s_2(1 + \alpha)}{f} v_M. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die Längenänderung der Saite bewirkt eine reine  $w$ -Zusatzkraft der Grösse  $-k\Delta f$ , die Richtungsänderung dagegen eine Zusatzkraft der Grösse  $k(f-u)\Delta a$  senkrecht zur Saite, die man erst in ihre  $v$ - und  $w$ -Komponenten zerlegen muss. Die gesamte  $w$ -Komponente aus beiden Ursachen wird dann:

$$\left. \begin{aligned} F'_w &= -k\Delta f + k(f-u)\Delta a \operatorname{tg}(2a - \pi/2) \\ &= -k\Delta f - k(f-u)\frac{c_2}{s_2}\Delta a \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und mit (8):

$$\left. \begin{aligned} F'_w &= v_M k \left[ -c_2 + 2\alpha s^2 + \frac{f-u}{f} c_2 (1 + \alpha) \right] \\ &= v_M k \left[ \alpha - \frac{u}{f} c_2 (1 + \alpha) \right] \quad (\text{wegen } c_2 + 2s^2 = 1) \\ &= C_v k \left[ \alpha - \frac{u}{f} c_2 (1 + \alpha) \right] t^2. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die zweimalige Integration nach  $t$  gemäss (4) liefert

$$w'_M = \frac{C_v k}{12m} \left[ \alpha - \frac{u}{f} c_2 (1 + \alpha) \right] t^4 = C_w t^4, \quad (11)$$

und nach (6) kommt unter Berücksichtigung von (2) das Endergebnis:

$$\left. \begin{aligned} R &= 3(f-u) \left[ \alpha s_2 - \frac{u}{f} s_2 c_2 (1 + \alpha) \right]^{-1} \\ &= 3(f-u) \left[ \alpha s_2 - \frac{u}{2f} s_4 (1 + \alpha) \right]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Speziell für die homogene Kreisscheibe folgt mit  $\alpha = 1$

$$R_h = 3(f-u) \left[ s_2 - \frac{u}{f} s_4 \right]^{-1} \quad (13)$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat von I. Paasche [2].

### 5. Der Fall des Massenpunkts

Da in (13) überraschenderweise ausser  $g$ ,  $m$  und  $k$  (diese stecken implizit in  $(f-u)$ ) auch der Scheibenradius  $r$  nicht mehr vorkommt, könnte man denken, (13)

gelte auch für den Fall, dass die Scheibe durch einen Massenpunkt ersetzt wird. Dies ist indes nicht richtig. Der Grenzübergang  $r \rightarrow 0$  ist nicht erlaubt, weil bei ihm bei  $D$  nach (3) ( $r/\varrho$  ginge gegen 1) schon in 0. Ordnung ein unendlich grosser Koeffizient von  $t^2$  entstünde. Man kann auch sagen: Der Konvergenzbereich der Methode in  $t$  würde für  $r \rightarrow 0$  auf Null zusammenschrumpfen. Man kann jedoch das Ergebnis für den Massenpunkt durch einen einfachen Kunstgriff erhalten: Man unterbindet die für den Massenpunkt sinnlose Drehung durch ein bei verschwindendem  $r$  endlich bleibendes Trägheitsmoment, also durch  $\alpha = 0$ . Dies in (12) eingesetzt, liefert sofort für den Massenpunkt:

$$R_{M.P.} = -6 \frac{f}{s_4 u} (f - u). \quad (14)$$

## 6. Der Fall der starren Saiten

Sind die Aufhängesaiten nicht dehnbar, so ist  $f = u = \text{const}$ . Das formale Ergebnis nach (12) oder (13) wäre  $R = 0$ , was sicher unrichtig ist. Tatsächlich ist auch dieser Grenzübergang nicht erlaubt, da er durch  $k \rightarrow \infty$  auszudrücken wäre, wobei in (3) wieder schon in 0. Ordnung die Koeffizienten von  $t^2$  unendlich würden. Während eben bei elastischen Saiten beim Zerschneiden der rechten Saite die Spannkraft der linken sich nur allmählich, gemäß ihrer Längenänderung, ändert, wird sie im Fall der starren Saite, die keine Längenänderung zulässt, schlagartig anders, in ihrem Betrag erzwungen durch die Zwangsbedingung  $f = \text{const}$ . Es gibt hier nicht wie im Fall des Massenpunktes einen Kunstgriff, um doch noch ein richtiges Ergebnis zu gewinnen. Die ganze Rechnung müsste vielmehr von vornherein mit Hilfe der Zwangsbedingung anders geführt werden.

Werner Braubek, Institut für Theoretische Physik, Universität Tübingen

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] E. T. WHITTAKER, *Analytische Dynamik* (Berlin 1924), S. 183.
- [2] I. PAASCHE, *Szabó-Festschrift des Verlags Wilhelm Ernst und Sohn* (Berlin, München, Düsseldorf, 1971).
- [3] H. GÜNZLER (München 1956), unveröffentlicht.

# The Cubic Revisited

In this note we offer another *method* for solving the general cubic equation. Our method amounts to the technique of completing the cube in a transformed equation by which we arrive at a binomial equation. Our *formula* is of course not new in every way, and naturally it can be reconciled with the celebrated one by Cardan (Tartaglia).

The general cubic equation

$$f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d = 0, \quad (a \neq 0)$$