Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 30 (1975)
Heft: 3

Rubrik: Bericht

Aufgabe 742. Ein Ring R mit Einselement 1 heisst lokal, falls er ein Ideal I besitzt derart, dass $R \setminus I$ die Einheitengruppe von R ist. Bekanntlich ist dann der Quotientenring R/I ein Körper. Man beweise: Ist R ein lokaler Ring und hat R/I eine von 2 verschiedene Charakteristik, so gibt es genau ein Element a von R mit $a \neq 1$ und $a^2 = 1$.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

Aufgabe 743. Am ebenen Dreieck mit Inkreisradius r, Umkreisradius R und Umfang $2\,s$ gibt es beliebig viele richtige Aussagen der Form

$$0 \leq \frac{R\,r - 2\,r^2}{1} \leq \frac{s^2 - 27\,r^2}{A} \leq \frac{2\,s^2 - 27\,R\,r}{B} \leq \frac{R^2 - 2\,R\,r}{C} \leq \frac{R^2 - 4\,r^2}{D} \leq \frac{27\,R^2 - 4\,s^2}{E}$$

mit positiven reellen Zahlen A bis E. Man berechne der Reihe nach die maximalen derartigen A, B, C, D, E.

I. Paasche, München, BRD

Aufgabe 744. Es sei $2 = p_1 < p_2 < \ldots.$ die Folge aller Primzahlen, und für jedes natürliche n bezeichne q_n die kleinste Primzahl, welche kongruent 1 modulo p_n ist. Man zeige, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty \text{ gilt.}$$

P. Erdös, Budapest, Ungarn

Bericht

Mathematische Problemwettbewerbe 1972/73 und 1973/74 im Kanton Bern

Das mathematische Institut der Universität Bern hat es übernommen, die von der kantonal-bernischen «Informationsstelle für Mathematikunterricht» eingeführte Tradition der Mathematikwettbewerbe für höhere Mittelschüler fortzusetzen. Die Berichte über die 6 früheren Wettbewerbe (1966–1972) finden sich in El. Math. *23*, 18–20 (1968); *25*, 39–43 (1970); *26*, 93–95 (1971); *28*, 49–53 (1973).

Wettbewerb 7 (1972/73) war als Konkurrenz für Zweiermannschaften ausgeschrieben. Zuerst waren 4 Serien zu Hause zu bearbeiten; die 8 bestklassierten Mannschaften bestritten zum Schluss den Final in Klausur.

Wettbewerb 8 (1973/74) wurde erstmals in 2 Kategorien aufgeteilt. In der schweren Kategorie kämpften wiederum Zweiermannschaften; nach 3 zu Hause gelösten Serien qualifizierten sich 8 Mannschaften für den Viertelsfinal in Klausur; nach dem Ausscheidungssystem verblieben für den Halbfinal 4 Mannschaften, wovon die beiden besten gleichentags den Final zu bestreiten hatten. In der leichten Kategorie waren nur Schüler der Seminarien, der Untergymnasien und der Quarten der Gymnasien zugelassen. Sie erhielten 3 Serien leichterer Probleme vorgesetzt, gleichsam als Ansporn und Vorbereitung zur künftigen Teilnahme am Hauptwettbewerb.

Wir stellen im folgenden alle Aufgaben der schweren Kategorie vor, allerdings ohne Figuren und zusätzliche Erläuterungen, wie sie die Schüler benötigten; dazu informieren wir an 5 ausgewählten Aufgaben der leichten Kategorie über den Anfängerwettbewerb.

Wettbewerb 1972/73

1.1. $t(n)$ bezeichne die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n. Für welche n gilt $[t(n)]^2 = n$?

1.2. $q(n)$ bezeichne die Quersumme der natürlichen Zahl n. Zu jeder natürlichen Zahl lässt sich eine Folge von Zahlen wie folgt konstruieren: man quadriere die Zahl und bilde die Quersumme des Ergebnisses (1. Glied der Folge); man quadriere dieses Glied und berechne wieder die Quersumme des Quadrats (2. Glied der Folge); usw. Beweise, dass diese Folge für beliebige Ausgangszahlen periodisch wird. Welche Perioden können auftreten?

1.3. Q bezeichne ein Quadrat der Seitenlänge 1; weiter sei die natürliche Zahl n vorgegeben. Q soll nun durch n kongruente Kreisscheiben überdeckt werden. Dies ist sicher möglich, wenn der Radius der Kreisscheiben genügend gross ist. Es bezeichne $R(n)$ den kleinstmöglichen Radius, der die Aufgabe noch lösbar macht. Es sind die Werte von $R(n)$ für kleine n, zum mindesten aber für $n = 1, 2, 3, 4$ zu bestimmen.

1.4. Ein Paket von n Karten wird von oben nach unten durchnumeriert. Man führt nun folgendes aus: die oberste Karte des Pakets wird unter dieses gelegt, die jetzt oberste Karte wird fortgenommen. Dies wird fortgesetzt, indem die nun oberste Karte nach unten gelegt, die nächste wieder fortgenommen wird, usw. Bei genügender Wiederholung der beiden Handlungen bleibt zum Schluss eine einzige Karte übrig. Welche Nummer hatte diese Karte bei der ursprünglichen Numerierung?

2.1. Aus 6 gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge 1 bilden wir polygonale Figuren, indem wir die Dreiecke längs ihrer Seiten aneinanderfügen. S sei die Menge aller möglichen, paarweise inkongruenten Figuren, die so entstehen können. Man kann mit diesen Figuren durch puzzleartiges Zusammensetzen neue Figuren aufbauen, wobei jedes Mitglied von S genau einmal verwendet werden muss. Kann man auf diese Weise ein gleichschenkliges Dreieck oder ein gleichschenkliges Trapez aufbauen?

2.2. In ein quadratisches Schema mit 3×3 Feldern werden 9 ganze Zahlen eingetragen. Das Schema heisst «magisches Quadrat», wenn die 8 Summen der Zahlen in den Zeilen, den Spalten und den Diagonalen alle gleich gross sind. Bestimme alle möglichen magischen Quadrate.

2.3. Sind a, b zwei parallele Geraden der Ebene, so bezeichne $S(a, b)$ die Abbildung der Ebene in sich, die darin besteht, dass man zuerst an der Geraden a als Achse spiegelt und anschliessend an b. Vier Geraden a, b, c, d der Ebene seien nun so gegeben, dass a parallel zu b, c parallel zu d, aber c nicht parallel zu a ist. Mit T werde die Abbildung der Ebene in sich bezeichnet, die aus der Ausführung zuerst von $S(a,b)$, dann von $S(c,d)$ besteht. Zeige, dass es zwei Geraden e, f der Ebene so gibt, dass $T = S(e,f)$ gilt. Sind e, f eindeutig bestimmt?

2.4. Die Ecken eines beliebigen konvexen Sechsecks werden in einem Umlaufsinn mit P_1 bis P_6 numeriert. Je drei aufeinanderfolgende Punkte bilden ein Dreieck. Sei S_i der Schwerpunkt des Dreiecks $P_i\, P_{i+1}\, P_{i+2}$ $(P_7 = P_1, P_8 = P_2)$. Die 6 Schwerpunkte bilden, in der angegebenen Reihenfolge verbunden, wieder ein Sechseck. Was lässt sich über dieses Schwerpunktssechseck aussagen?

3.1. Es seien vier verschiedene ganze Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 gegeben. Man bildet aus ihnen erstens sämtliche Differenzen $a_i - a_j$ $(i = j$ zugelassen) und zweitens sämtliche Summen $a_i + a_j$. Seien d und s die Anzahl der dabei entstehenden verschiedenen Differenzen bzw. verschiedenen Summen. Gibt es vier ganze Zahlen derart, dass der Quotient d/s kleiner als 1 wird?

3.2. In einer Schulklasse sind je zwei Schüler mit genau einem dritten befreundet. Alle Schüler, die mit einem bestimmten Schüler befreundet sind, bilden dessen Freundeskreis. Beweise, dass jeder Freundeskreis aus Paaren von Schülern besteht, und zwar derart, dass die beiden Schüler jedes solchen Paares miteinander, aber mit keinem andern Schüler des gleichen Freundeskreises befreundet sind.

3.3. Sei P ein konvexes Polygon in der Ebene. Unter einer Halbierungsgeraden von P verstehen wir eine Gerade der Ebene, die P schneidet und dabei in zwei flächengleiche Teilstücke zerlegt. Beweise: Hat P die Eigenschaft, dass alle seine Halbierungsgeraden durch einen Punkt gehen, so ist P zentralsymmetrisch.

3.4. Es sind n-stellige Zahlen zu bilden, die nur aus den Ziffern 1, 2, 3 bestehen. Dabei sollen die Ziffern 3 stets in Dreierblöcken, die Ziffern 2 in Zweierblöcken auftreten, wobei gleichartige Blöcke aufeinander folgen dürfen. Beispiel: 133322333333 111122221. Seien d und z die Anzahlen der Dreierblöcke von 3ern bzw. der Zweierblöcke von 2ern. Bestimme die Anzahl $f(n,d,z)$ der verschiedenen möglichen Zahlen dieser Art.

4.1. In einer Stadt mit p Einwohnern haben im Jahre 1973 p_1 der Einwohner an einem Sonntag, p_2 an einem Montag, $\ldots$, p_7 an einem Samstag Geburtstag. Wählen wir zufallsartig $r \geqslant 2$ Personen aus, so kann es vorkommen, dass zwei oder mehrere davon am gleichen Wochentag Geburtstag haben. $w(r)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von r ausgewählten Personen mindestens zwei an einem gleichen Wochentag Geburtstag haben. Berechne $w(2)$ und $w(3)$. Für welche Werte der $p_1, p_2, \ldots, p_7$ werden die Wahrscheinlichkeiten $w(2)$ bzw. $w(3)$ am grössten, für welche am kleinsten?

4.2. Wir betrachten gleichschenklige Trapeze mit spitzem Winkel 60° und ganzzahligen Seitenlängen; r, n seien die Schenkellänge bzw. die Länge der grösseren Grundlinie. Diese sei durch Teilpunkte P_1 bis P_{n-1} in n Strecken der Länge 1 aufgeteilt. Die Punkte P_i sollen nun Startpunkte von Streckenzügen sein, die durch das Trapezinnere verlaufen und folgenden Regeln gehorchen: 1. Die Startstrecke schliesst mit der Grundlinie einen Winkel von 60° bzw. 120° ein. 2. Der Weg verläuft geradlinig, bis er auf den Rand des Trapezes trifft; dort wird er nach dem Brechungsgesetz (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) reflektiert und geradlinig fortgesetzt, bis er wieder auf den Rand trifft usw. Es gibt Streckenzüge, die nach mehrmaliger Reflexion in einer Trapezecke enden (Sackgassen); die anderen Streckenzüge enden nach endlich vielen Reflexionen wieder im Startpunkt (Runden). Man berechne die Anzahl $z(n, r)$ der verschiedenen Runden.

4.3. Zwei Geraden g und h in der Ebene schneiden sich im Punkt S. P sei ein beliebiger, von S verschiedener Punkt. Ein Kreis durch S und P schneidet g und h ausser in S in zwei Punkten G und H (einer der Punkte kann in Sonderfällen mit S zusammenfallen). Konstruiere den Kreis so, dass die Länge der Verbindungsstrecke GH möglichst klein wird.

4.4. Ist x eine reelle Zahl, so bedeute $[x]$ die grösste ganze Zahl, die nicht grösser als x ist. Bei gegebener natürlicher Zahl n betrachten wir die n Zahlen $a_k = k + [n/k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Unter den endlich vielen Zahlen a_k gibt es natürlich eine kleinste, die auch mehrmals auftreten kann. Beweise, dass a_i mit $i = [\sqrt{n}] + 1$ jedenfalls minimal ist. Gib zu jedem n den minimalen Wert a_i explizit an. Suche schliesslich alle Zahlen n, für die das Minimum nur einmal auftritt.

5.1. Ein gleichseitiges Dreieck D lässt sich auf viele Arten in kleinere gleichseitige Dreiecke zerlegen. Es gibt eine natürliche Zahl m mit der Eigenschaft: für jedes n, das grösser oder gleich m ist, gibt es eine Zerlegung von D in n gleichseitige Dreiecke. Beweise diese Behauptung und bestimme die kleinste Zahl m mit der beschriebenen Eigenschaft.

5.2. In der Ebene sei ein geschlossener Streckenzug $s_1, s_2, \ldots, s_n$ gegeben. M_i sei der Mittelpunkt der Strecke s_i. Auf jeder Strecke s_i werde zusätzlich ein Teilpunkt T_i so gewählt, dass alle Strecken, in einem festgelegten Umlaufssinn betrachtet, im gleichen Verhältnis geteilt werden. Betrachte die folgende Aussage: «Jede Strecke $M_i M_{i+1}$ schneidet die Strecke $T_i T_{i+1}$ in deren Mittelpunkt.» ($T_{n+1} = T_1$, $M_{n+1} = M_1$, $i = 1, 2, \ldots, n$). Ist diese Aussage richtig?

5.3. Beim Betrachten der Gleichheit $153846 \cdot 4 = 615384$ stellt man fest, dass das Produkt rechts einfach dadurch entsteht, dass man beim mehrstelligen Faktor links die Endziffer abtrennt und zur vordersten Ziffer macht! Bestimme alle Dezimalzahlen, die bei der Multiplikation mit 4 denselben Effekt zeigen.

Wettbewerb 1973/74, schwere Kategorie

1.1. Die reelle Zahlenfolge (q_n) sei durch die Wahl von q_1 und die Rekursion $q_n = (2 - q_{n-1})^{-1}$, $n \geqslant 2$, festgelegt. Bestimme alle zulässigen Anfangsglieder. Beweise, dass eine von q_1 abhängige Nummer m existiert, für welche $0 < q_n \leqslant 1$ für alle $n > m$ gelten muss.

1.2. Gegeben sei eine hinreichend grosse Anzahl gleichseitiger Dreiecke und Quadrate, beide mit Seitenlänge 1. Aus ihnen sollen konvexe Polygone zusammengesetzt werden. Kann die Seitenzahl solcher Polygone beliebig gross sein? Falls nicht, wie gross ist die maximale Seitenzahl?

1.3. Durch $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ist die Fibonacci-Folge erklärt. Zeige, dass jede natürliche Zahl N durch $N = x_0 a_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots$ dargestellt werden kann, wobei die Koeffizienten x_i 0 oder 1 betragen, zwei aufeinanderfolgende Koeffizienten x_i, x_{i+1} jedoch nicht gleichzeitig 1 sein dürfen. Beweise zudem die Eindeutigkeit dieser Darstellung.

1.4. $n \geqslant 9$ Städte sind durch ein Strassennetz so miteinander verbunden, dass jede Stadt von jeder anderen aus durch genau eine direkte Strasse erreichbar ist. Das ganze Netz ist kreuzungsfrei gebaut. Die Verbindung zwischen zwei Städten ist entweder eine Autobahn oder eine Normalstrasse. Zeige, dass es unter den n Städten drei gibt, die durch ein Autobahndreieck verbunden sind, oder aber deren vier, bei denen alle sechs Verbindungsstrassen Normalstrassen sind.

2.1. Von $n \geqslant 4$ Punkten der Ebene sollen keine drei auf einer Geraden liegen und je vier der Punkte sollen ein konvexes Viereck bilden. Beweise, dass die n Punkte Ecken eines konvexen n-Ecks sind.

2.2. Welche natürlichen Zahlen lassen sich als Summe von zwei oder mehreren aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darstellen?

2.3. In einem Quadratgitter werde unter einem Aggregat eine beliebige endliche Menge von Gitterquadraten verstanden. $f(A)$ bezeichne die Anzahl der Gitterquadrate des Aggregats A, $k(A)$ die Anzahl derjenigen Seiten von Quadraten aus A, die nicht zwei Quadraten von A gemeinsam sind. Schliesslich bedeute $q(A) = f(A)/k(A)$. Unabhängig von A gilt $q(A) \geqslant 1/4$. Beweise, dass bei geeigneter Wahl von A die Zahl $q(A)$ jeden rationalen Wert $\geqslant 1/4$ annehmen kann.

3.1. a, b, c seien die Masszahlen der Seitenlängen eines Dreiecks, U die Masszahl seines Umfangs, F diejenige seines Flächeninhalts. Suche alle Dreiecke, für welche a, b, c ganze Zahlen sind und für die $U = F$ gilt.

3.2. Aus den natürlichen Zahlen von 1 bis n sollen ungeordnete Quadrupel $\{r, s, t, u\}$ so gebildet werden, dass jedes Paar $\{i, j\}$ in mindestens einem Quadrupel vorkommt. Die kleinste Zahl von solchen Quadrupeln sei mit $q(n)$ bezeichnet. Berechne $q(10)$.

3.3. Die Ecken eines Rhombus mit spitzem Winkel 60° werden im Uhrzeigersinn mit 1, 2, 3, 4 bezeichnet. In 1 werde ein beliebig grosses gleichseitiges Dreieck angehängt, seine Lage zum Rhombus sei ebenfalls beliebig. Von 1 aus werden die Ecken des Dreiecks, ebenfalls im Uhrzeigersinn, mit 1, 5, 6 bezeichnet. a, b seien die Mittelpunkte der Strecken 45 und 26. Beweise, dass die drei Punkte $a, b, 3$ ein gleichseitiges Dreieck bilden.

3.4. Sei $p_1, p_2, \ldots, p_n$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$; wir stellen sie durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

dar. Mit d_i werde die Anzahl der Stellen bezeichnet, um die man die Zahl i in der oberen Zeile nach rechts schieben muss, damit sie über der Zahl i in der unteren Zeile steht; gerät man dabei über n hinaus, wird vorne bei 1 weiter gezählt. Gibt es für ein vorgegebenes n stets eine Permutation, bei der die n Zahlen $d_1, d_2, \ldots, d_n$ alle voneinander verschieden sind?

4.1. Durch $a_n = 7\,a_{n-1} - 12\,a_{n-2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ ist eine Zahlenfolge definiert. Zeige, dass die Folge auch den Rekursionen $a_n = 3\,a_{n-1} + 4^{n-2}$ und $a_n = 4\,a_{n-1} + 3^{n-2}$ genügt und drücke a_n als Funktion von n allein aus.

4.2. Ein Geologenverein umfasst n Mitglieder. Im Jahre 1974 finden gleichzeitig zwei Kongresse mit verschiedenen Themen statt, an denen sich der Verein durch Mitgliederdelegationen vertreten lassen will. Jede Delegation umfasst mindestens ein Mitglied; die beiden Delegationen zusammen können, müssen aber nicht alle n Mitglieder umfassen. Auf wieviele Arten kann der Verein die beiden Delegationen zusammensetzen?

4.3. Gibt es zu jedem n einen schlichten Graphen mit n Ecken, deren Ordnungen (Valenzen) alle möglichen Werte von 1 bis n durchlaufen (wobei natürlich eine Ordnung zweimal auftreten muss)?

4.4. Es soll eine möglichst grosse Menge paarweise verschiedener natürlicher Zahlen so angegeben werden, dass keine der Zahlen, aber auch keine Summe aus zwei oder mehreren von ihnen, durch 7 teilbar ist.

5.1. x bezeichne eine natürliche Zahl, die weder durch 2, 3 noch durch 5 teilbar ist. Beweise, dass dann die Zahl $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)$ stets durch $5! = 120$ teilbar sein muss.

5.2. Der Dezimalbruch 0,123456789101112... entsteht durch Nebeneinanderreihen der natürlichen Zahlen. Beweise, dass dieser unendliche Dezimalbruch aperiodisch ist.

5.3. Betrachte die Zahlenfolge

$$\frac{0 \cdot 1}{2}, \quad \frac{1 \cdot 2}{2}, \ldots, \quad \frac{n\,(n+1)}{2}, \ldots$$

und zeige, dass die zugehörige Endzifferfolge periodisch ist.

5.4. Seien 5 Geraden in einer Ebene gegeben, die mindestens zwei Schnittpunkte aufweisen. Zeige, dass sie sogar mindestens vier Schnittpunkte haben müssen.

6.1. In einem hinreichend grossen Quadratgitter sei als Ausgangsfigur F_0 ein Quadrat aus k^2 Einheitsquadraten vorgegeben. Im ersten Schritt fügen wir zu F_0 alle Einheitsquadrate bei, die mit F_0 eine Strecke gemeinsam haben; es entsteht so die Figur F_1. Wir setzen das Verfahren fort: F_m entsteht aus F_{m-1}, indem zu F_{m-1} alle Einheitsquadrate gefügt werden, die mit F_{m-1} mindestens eine Strecke gemeinsam haben. Berechne f_m, die Anzahl der Einheitsquadrate von F_m.

6.2. Eine Kreisscheibe wird in eine gerade Anzahl Sektoren geteilt. In jedem Sektor liege ein Spielstein. Ein «Zug» besteht im Verschieben eines Steins in ein Nachbarfeld im Uhrzeigersinn und im gleichzeitigen Verschieben eines anderen Steins im Gegenuhrzeigersinn in ein Nachbarfeld. Ist es möglich, durch eine Anzahl Züge alle Steine im gleichen Feld zu vereinen?

6.3. Man betrachte die Zahlenfolge $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$. Bildet man die neue Folge $b_n = a_{n+1}/a_n$, so ist leicht zu sehen, dass (b_n) gegen 2 konvergiert. Wie weit ist b_{1000} von 2 entfernt?

6.4. Drei Kreise vom Radius 1 gehen durch den Punkt S. Zeige, dass die übrigen Kreisschnittpunkte auf einem Kreis vom Radius 1 liegen. Studiere auch den Entartungsfall, dass einer der übrigen Kreisschnittpunkte mit S zusammenfällt.

Wettbewerb 1973/74, leichte Kategorie

Hier stellen wir nur eine Auswahl der gestellten Aufgaben vor, damit sich der Leser ein Bild von der Art und vom Schwierigkeitsgrad der Probleme machen kann.

1. Zeige, dass die Zahl $17^{1000} - 13^{1000}$ durch 8 teilbar ist. Ist sie auch durch 16 teilbar?

2. Sei n eine ungerade natürliche Zahl $\geqslant 3$. Eine kreisförmige Scheibe trage auf ihrem Rand in gleichmässigen Abständen n Zapfen, die mit $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ numeriert werden. Eine zweite, gleich grosse Scheibe besitze auf ihrem Rand n Löcher, in welche die Zapfen hineinpassen. Die Löcher werden ebenfalls mit $1, 2, \ldots, n$ numeriert, jedoch in einer anderen Reihenfolge. Lässt sich die Numerierung der Löcher so wählen, dass bei beliebigem Aufeinanderlegen der beiden Scheiben stets mindestens ein Zapfen und ein Loch die gleiche Nummer haben?

3. Im Raum seien 17 Punkte so verteilt, dass keine der 136 möglichen Verbindungsstrecken eine andere schneidet, ausser in einem gemeinsamen Endpunkt. Die Verbindungsstrecken werden nun irgendwie mit drei verschiedenen Farben gefärbt gedacht. Man stellt fest: wie man auch immer die Färbung vornimmt, stets findet man ein Dreieck aus Verbindungsstrecken gleicher Farbe. Beweise diese Feststellung.

4. Aus einem Schachbrett werden ein weisses und ein schwarzes Feld ausgesägt. Daneben hat man 31 rechteckige Steine zur Verfügung, deren jeder genau zwei benachbarte Felder des Schachbretts überdecken kann. Ist es möglich, die 62 Felder des ausgesägten Bretts durch die 31 Steine lückenlos zu überdecken?

5. x, y bezeichnen natürliche Zahlen, v ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches. Man bestimme alle solchen x, y, v, die der Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{v-1}{v}$$

genügen.

P. Wilker und J. Binz, Bern, Mathematisches Institut der Universität