

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 30 (1975)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Nach Gleichung (20) bilden  $\{U\}$  und  $\{V\}$  gegenläufige projektive Punktreihen in vereinigter Lage. Für die Gegenpunkte  $U_g$  und  $V_g$  der Projektivität ergeben sich die Ordinaten

$$\xi_g = 0 \quad \text{bzw.} \quad \eta_g = -\frac{2\rho(6+m^2)}{m^2}. \quad (21)$$

Mit Hilfe von (21) erhält man für die Potenz dieser Projektivität

$$k^2 = 3\rho^2 \quad (22)$$

und die Charakteristik der Projektivität

$$\delta = \frac{6+m^2-2\sqrt{G}}{6+m^2+2\sqrt{G}} \quad \text{mit} \quad G = 9+3m^2+m^4. \quad (23)$$

Mit den Ergebnissen (21) und (22) ist ein gut überschaubarer konstruktiver Zugang für jedes beliebige Punktpaar  $\{U, V\}$  und damit auch für die Punktpaare  $\{M, K_2\}$  gesichert (vgl. Abb. 6) (vgl. Sonderfall für Scheitelpunkte in [3]). Bei Vorgabe eines Kegelschnittes  $\kappa$  (etwa durch dessen Achsen) ist es mit diesen Mitteln möglich, die Krümmungsmittelpunkte  $K, K_1$  und  $K_2$  zu jedem beliebigen Punkt  $P \in \kappa$  zu konstruieren. Umgekehrt ist auch  $\kappa$  eindeutig konstruierbar, wenn zu einem Punkt  $P \in \kappa$  die Krümmungsmittelpunkte  $K, K_1$  und  $K_2$  vorgelegt sind.

Eberhard Schröder, Technische Universität Dresden, DDR

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. STRUBECKER, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie* (Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1958), S. 33.
- [2] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer-Verlag, Wien 1957), S. 102.
- [3] E. SCHRÖDER, *Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung* *El. Math.* 25, 7–13 (1970).

## Kleine Mitteilungen

### Zero-divisors in a ring of arithmetic functions

In [1, p. 247], M. V. Subbarao introduced a convolution in the set  $S$  of all arithmetical functions, which he called 'exponential convolution' as follows:

$$(\alpha \circ \beta)(1) = \alpha(1) \beta(1),$$

$$(\alpha \circ \beta)(n) = \sum_{\substack{d_i | a_i \\ i=1, 2, \dots, r}} \alpha(p_1^{d_1} \dots p_r^{d_r}) \beta(p_1^{a_1/d_1} \dots p_r^{a_r/d_r}),$$

if  $\alpha, \beta \in S$  and  $n > 1$  has the canonical representation  $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ .

Among other things he proved the following result regarding the zero-divisors in the ring  $(S, +, \circ)$ :

A necessary condition for  $\alpha \in S$  to be a non-zero-divisor is that given any finite number of primes  $p_1, \dots, p_r$ , there exist positive integers  $a_1, a_2, \dots, a_r$  such that  $\alpha(p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}) \neq 0$ .

Whether the above condition is also sufficient for a non-zero-divisor *was left as an open question* [1, p. 259].

In this note we prove that if  $\alpha(1) \neq 0$ , then the above condition is sufficient for  $\alpha$  to be a non-zero-divisor. This is contained in the following.

*Theorem.* If  $\alpha(1) \neq 0$  and  $\alpha$  is a zero-divisor in  $(S, +, \circ)$ , then there exist primes  $p_1, \dots, p_r$  such that  $\alpha(p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}) = 0$  for all positive integers  $a_1, \dots, a_r$ .

*Proof.* Let  $N$  denote the set of all positive integers. Since  $\alpha$  is a zero-divisor, there exists a  $\beta$  in  $S$  with  $\beta \neq 0$  such that

$$(\alpha \circ \beta)(n) = 0 \quad \text{for all } n \in N \quad (A)$$

Since  $\beta \neq 0$ , there is an  $m \in N$  such that  $\beta(m) \neq 0$ . Since  $\alpha(1) \beta(1) = 0$  and  $\alpha(1) \neq 0$ , we must have  $\beta(1) = 0$ . Consequently  $m > 1$ . Let

$$m = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$$

be the canonical representation of  $m$ . We now claim that with these  $p_1, \dots, p_r$ :

$$\alpha(p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}) = 0 \quad \text{for all positive integers } a_1, \dots, a_r. \quad (B)$$

We suppose that (B) is false and obtain a contradiction. If (B) is false, then the set

$$U = \{(b_1, \dots, b_r) \in N^r \mid \alpha(p_1^{b_1} \dots p_r^{b_r}) \neq 0\}$$

is a non-empty subset of the well-ordered set  $N^r$  (under the lexicographic ordering) and hence has the least element say  $(c_1, \dots, c_r)$ . Write

$$T = \{(f_1, \dots, f_r) \in N^r \mid \beta(p_1^{f_1} \dots p_r^{f_r}) \neq 0\}.$$

Then since  $\beta(p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}) \neq 0$ , it follows that  $T$  is a non-empty subset of the well ordered set  $N^r$  (again under the lexicographic ordering) and hence has a least element say  $(e_1, \dots, e_r)$ . Now from (A),

$$0 = (\alpha \circ \beta)(p_1^{c_1 e_1} \dots p_r^{c_r e_r}) = \sum_{\substack{d_i \mid c_i e_i \\ i=1,2,\dots,r}} \alpha(p_1^{d_1} \dots p_r^{d_r}) \beta(p_1^{c_1 e_1/d_1} \dots p_r^{c_r e_r/d_r}).$$

In the above sum terms for which  $d_1 < c_1$  vanish because of the minimum character of  $(c_1, \dots, c_r)$ ; similarly terms for which  $d_1 > c_1$  vanish owing to the minimum property of  $(e_1, \dots, e_r)$ . Thus we will be left with only terms for which  $d_1 = c_1$ . Now clearly the only non-vanishing terms will be corresponding to  $d_2 = c_2$ . Continuing this argument, we get from (C) the contradiction

$$0 = \alpha(p_1^{c_1} \dots p_r^{c_r}) \beta(p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}).$$

Thus (B) must be true.

We finally remark that the above theorem need not hold if  $\alpha(1) = 0$  as is shown by the following example.

*Example.* Let  $\alpha, \beta \in S$  be defined as follows:

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ \mu(n) & \text{if } n > 1 \text{ } (\mu \text{ Möbiusfunction}) \end{cases} \quad \beta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{for } n > 1 \end{cases}$$

then clearly  $\alpha \circ \beta = 0$  so that  $\alpha$  is a zero-divisor. But for any finite number of primes  $p_1, \dots, p_r$ ,

$$\alpha(p_1 \cdots p_r) = \mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r \neq 0.$$

A. S. Sastry, Waltair, India

#### REFERENCE

- [1] M. V. SUBBARAO, *On some arithmetic convolutions, Lecture notes in Mathematics*, Vol. 251, Springer-Verlag, p. 247–271 (1972).

## Aufgaben

**Aufgabe 717.** Gegeben sei ein Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $r$ . Man beweise: Die Schar aller jener Kreise, deren Mittelpunkte  $P$  auf einer Sehne  $s$  von  $k$  liegen und deren Radien durch die Potenzstrecke von  $P$  bezüglich  $k$

$$(\sqrt{r^2 - MP^2} \geq 0)$$

gegeben sind, wird von einer Ellipse eingehüllt. W. Kienberger, Graz, Österreich

*Lösung:* Wir wählen ein cartesisches Koordinatensystem  $(X, Y)$  mit  $M$  als Ursprung so, dass die Sehne  $s$  parallel zur  $X$ -Achse ist; ihr Abstand von der  $X$ -Achse sei  $a$ . Es sei  $P = (x, a) \in s$ . Dann gilt  $\overline{MP}^2 = a^2 + x^2$ . Die Gleichung der Kreislinie um  $P$  mit Radius  $\sqrt{r^2 - \overline{MP}^2}$  ist dann

$$f(X, Y; x) = (X - x)^2 + (Y - a)^2 - (r^2 - a^2 - x^2) = 0. \quad (1)$$

Die Gleichung der Umhüllenden von (1) erhält man durch Auflösung des Gleichungssystems

$$f(X, Y; x) = 0 \quad (2)$$

$$f_x(X, Y; x) = 2(x - X) + 2x = 0, \quad (3)$$

wobei  $x$  als Parameter der betrachteten Schar auftritt.

Aus (3) und (2) mit (1) folgt dann:

$$2 \left( \frac{X}{2} \right)^2 + (Y - a)^2 = r^2 - a^2. \quad (4)$$

Die Umhüllende ist folglich eine Ellipse.