

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	30 (1975)
<b>Heft:</b>	3
<b>Artikel:</b>	Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschel von Kegelschnitten
<b>Autor:</b>	Schröder, Eberhard
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-30648">https://doi.org/10.5169/seals-30648</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 30

Heft 3

Seiten 49–72

10. Mai 1975

## Untersuchungen zu einem hyperoskulierenden Büschen von Kegelschnitten

Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen ist eine auf K. H. Schellbach (1843) zurückgehende und in viele Lehrbücher der darstellenden Geometrie aufgenommene Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $K$  zu einem Punkt  $P$  eines Kegelschnittes  $\alpha$  bei Vorgabe einer Achse  $a$  und des Mittelpunktes  $M$  (Abb. 1), (vgl. [1]). Diese Konstruktion legt die Aufgabenstellung nahe, aus den vorgegebenen Punkten  $K$ ,  $P$  und  $M$  die Achse  $a$  zu ermitteln. Noch allgemeiner kann nach dem Achsenhüllgebilde des durch die Punkte  $P$  und  $K$  sowie den gemeinsamen Durchmesser  $d$  ( $P \in d$ ) festgelegten hyperoskulierenden Büschels von Kegelschnitten  $\{\alpha\}$  gefragt werden. Diese Vorgaben sind äquivalent damit, dass die Kegelschnitte von  $\{\alpha\}$  in  $P$  einen gemeinsamen Oskulationskreis und eine gemeinsame Affinnormale  $d$  besitzen. Je zwei nicht zerfallende Kegelschnitte des Büschels berühren sich also in  $P$  von dritter Ordnung. Dabei kann der Mittelpunkt  $M$  von  $\alpha$  jede beliebige Lage auf  $d$  ausser  $M = P$  annehmen. Im Fall der Ellipse liegen  $K$  und  $M$  auf einer Seite der durch  $P$  gehenden Tangente  $t$ ; im Fall der Hyperbel werden  $K$  und  $M$  von  $t$  getrennt.

Für die folgenden Rechnungen werde  $P$  in den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt. Dabei deckt sich die Tangente mit der  $x$ -Achse, die

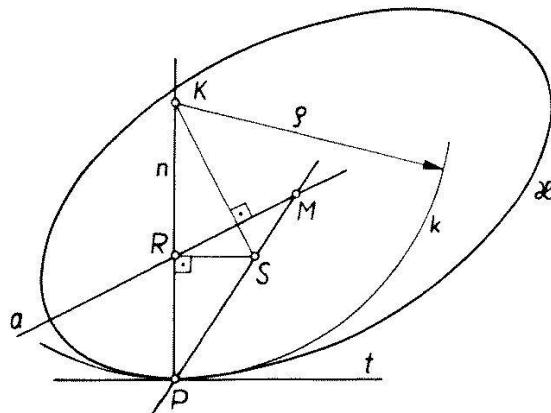


Abb. 1

Normale mit der  $y$ -Achse. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann vorausgesetzt werden, dass für den Radius  $\varrho$  des Krümmungskreises  $\varrho > 0$  und für den Anstieg  $m$  des gemeinsamen Durchmessers  $m = \tan \varphi > 0$  gilt. Ferner bietet sich aus der Schellbachschen Konstruktion an, die orientierte Strecke  $\overline{RS} = u$  als Büschelparameter ein-

zuführen. Dann besteht zwischen den Wertebereichen von  $u$  und den Arten von Kegelschnitten offensichtlich folgende Zuordnung:

$-\infty < u < 0$	Hyperbel	$\frac{\varrho m}{m^2 + 1} < u < \frac{\varrho}{m}$	Hyperbel
$u = 0$	Zerfall	$u = \frac{\varrho}{m}$	Zerfall
$0 < u < \frac{\varrho m}{m^2 + 1}$	Ellipse		
$u = \frac{\varrho m}{m^2 + 1}$	Parabel	$\frac{\varrho}{m} < u < \infty$	Ellipse

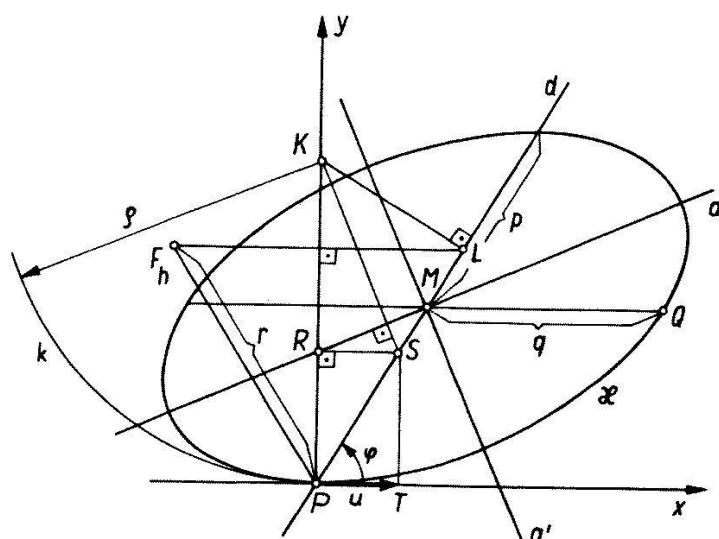


Abb. 2

Aus Abb. 2 ist mit den oben eingeführten Größen folgende Gleichung für die Achse  $a$  abzulesen:

$$ux + (um - \varrho)y + um(\varrho - um) = 0. \quad (1)$$

Durchläuft  $u$  den Wertebereich  $(-\infty, \infty)$ , so ergibt sich eine Schar von Achsen  $\{a\}$ , deren Hüllgebilde sich durch elementare Zwischenrechnung finden lässt. Man erhält:

$$(x + my)^2 + m\varrho(2x - 2my + m\varrho) = 0. \quad (2)$$

Die eine Schar der zu  $\{\alpha\}$  gehörigen Achsen  $\{a\}$  umhüllt die durch Gleichung (2) beschriebene Parabel  $\pi_h$ . Sie soll im folgenden als Achsenhüllparabel bezeichnet werden.

Die Achsenhüllparabel berührt die  $x$ -Achse (Tangente) im Punkt  $J(-\varrho m, 0)$  und die  $y$ -Achse (Normale) im Krümmungsmittelpunkt  $K(0, \varrho)$ . Ihre Achse steht senkrecht auf dem gemeinsamen Durchmesser  $d$ . Die Gleichungen der von der Ferngeraden verschiedenen Tangenten aus den absoluten Kreispunkten  $I_1(0:1:i)$  und  $I_2(0:1:-i)$  an  $\pi_h$  lauten:

$$i_1 \dots y = i x + \frac{m\varrho}{1+m^2} (m+i), \quad (3)$$

$$i_2 \dots y = -i x + \frac{m\varrho}{1+m^2} (m-i). \quad (4)$$

Diese Tangenten sind zugleich die Minimalgeraden durch den Brennpunkt  $F_h$  der Achsenhüllparabel  $\pi_h$ . Aus (3) und (4) resultieren die Brennpunktkoordinaten

$$F_h \left( -\frac{\varrho m}{1+m^2}, \frac{\varrho m^2}{1+m^2} \right). \quad (5)$$

Fällt man von dem Krümmungsmittelpunkt  $K$  das Lot auf den Durchmesser  $d$ , ergibt sich der Lotfusspunkt  $L$  mit den Koordinaten

$$L \left( \frac{\varrho m}{1+m^2}, \frac{\varrho m^2}{1+m^2} \right). \quad (6)$$

Nach (5) und (6) liegen  $L$  und  $F_h$  spiegelbildlich bezüglich der Normalen  $n$  durch  $P$  und es gilt

$$|KF_h| = |KL|. \quad (7)$$

Aus (7) folgt, dass der den Kegelschnitten von  $\{\varkappa\}$  gemeinsame Durchmesser  $d$  die Leitgerade der Achsenhüllparabel  $\pi_h$  ist. Da sich ferner die Achsen  $a$  und  $a'$  von jedem Kegelschnitt aus  $\{\varkappa\}$  in  $M$  senkrecht schneiden und  $M \in d$  gilt, ist auf Grund einer bekannten Parabeleigenschaft das Hüllgebilde der Schar von Achsen  $\{a'\}$  identisch mit dem Hüllgebilde von  $\{a\}$ . Folglich gilt der Satz:

Die Menge der Achsen eines hyperoskulierenden Kegelschnittbüschels  $\{\varkappa\}$  umhüllen eine Parabel (Achsenhüllparabel). Die Achse der in dem Büschel enthaltenen Parabel ist die Scheiteltangente, und der den Kegelschnitten von  $\{\varkappa\}$  gemeinsame Durchmesser ist die Leitgerade der Achsenhüllparabel. Fällt man vom Mittelpunkt des Oskulationskreises das Lot auf den gemeinsamen Durchmesser und spiegelt den erhaltenen Lotfusspunkt an der Normalen, so ergibt sich der Brennpunkt der Achsenhüllparabel (Abb. 3).

Bemerkenswert ist an dieser Stelle ein von Jakob Steiner aufgestellter Satz. Er lautet: Diejenige Parabel, welche die zu einem beliebigen Punkt  $P$  des Kegelschnittes  $\varkappa$  gehörende Tangente und Normale und ausserdem (für Ellipse und Hyperbel) deren Achsen berührt, beziehungsweise (bei der Parabel) die Achse zur Scheiteltangente hat, berührt die Normale in dem zu  $P$  gehörigen Krümmungsmittelpunkt.

Daraus lassen sich, wie C. Pelz gezeigt hat, die zahlreichen bekannten Konstruktionen von Krümmungsmittelpunkten zu beliebigen Punkten von Kegelschnitten ableiten. Der Satz sagt jedoch nichts über den Berührungs punkt der Tangente des Kegelschnittes mit der Parabel aus. Er lässt somit nicht den Schluss zu, dass diese Parabel das Achsenhüllgebilde eines hyperoskulierenden Kegelschnittbüschels ist.

Das hier gefundene Ergebnis soll auf die Konstruktion der Achsen eines Kegelschnittes  $\varkappa$  angewendet werden, wenn von diesem der Mittelpunkt  $M$ , ein Punkt  $P \in \varkappa$  und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt  $K$  gegeben sind.

Von  $K$  fällt man das Lot auf den Durchmesser  $d = (MP)$  und spiegelt den Lotfusspunkt  $L$  an  $n$ . Damit liegen Brennpunkt und Leitgerade der Achsenhüllparabel vor. Nun zieht man durch  $F_h$  eine Parallele zu  $d$  und schlägt um  $F_h$  einen Kreis mit dem Radius  $\sigma = |MF_h|$ . Dieser schneidet die Parallele zu  $d$  in den Punkten  $I$  und  $II$ .

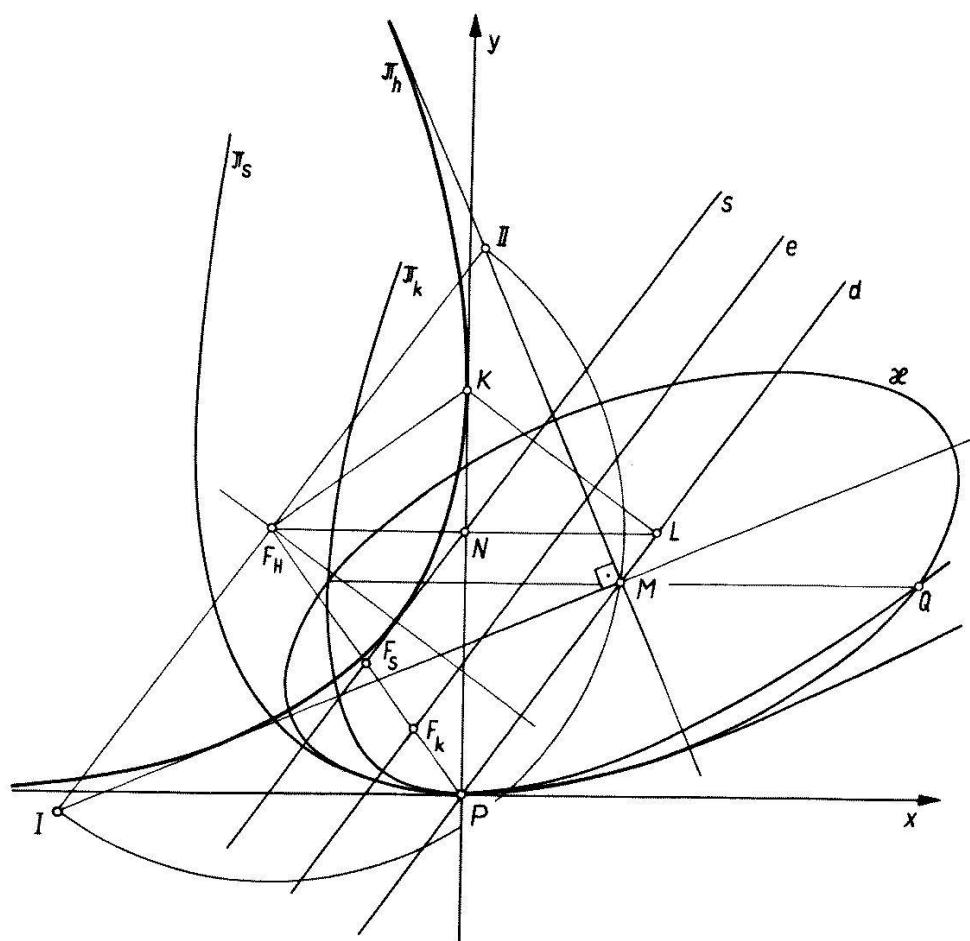


Abb. 3

Die Verbindungsgeraden  $a = (M \ I)$  und  $a' = (M \ II)$  stehen aufeinander senkrecht und berühren nach bekannten Sätzen die Parabel  $\pi_h$ . Sie sind demnach die Achsen des durch  $P$ ,  $M$  und  $K$  bestimmten Kegelschnittes  $\pi$  (Abb. 4).

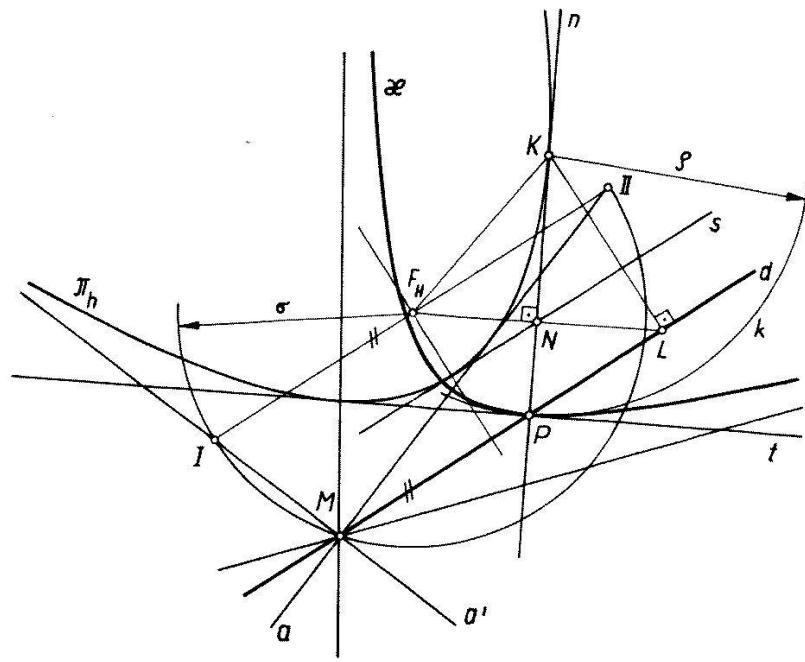


Abb. 4

In diesem Zusammenhang sind zwei weitere Parabeln von Interesse. Die dem Büschel  $\{\pi\}$  angehörende Parabel hat die Gleichung

$$(m x - y)^2 - 2 m^2 \varrho y = 0. \quad (8)$$

Die Achse dieser Parabel  $\pi_s$  fällt mit der Scheiteltangente von  $\pi_h$  zusammen. Für die Koordinaten des Brennpunktes findet man wie oben

$$F_s \left( -\frac{\varrho m}{2(1+m^2)}, \frac{\varrho m^2}{2(1+m^2)} \right). \quad (9)$$

Ein Vergleich von (9) mit (5) zeigt, dass  $F_s$  der Halbierungspunkt der Strecke  $\overline{PF}_h$  ist.

Die Frage nach dem geometrischen Ort der Endpunkte der in bezug auf  $d$  konjugierten Durchmesser aller in  $\{\pi\}$  enthaltenen Ellipsen führt auf eine weitere Parabel  $\pi_k$  mit der Gleichung

$$(m x - y)^2 - \varrho m^2 y = 0. \quad (10)$$

Ihre Achse ist die Mittellinie der Leitgeraden  $d$  und der Scheiteltangente  $s$  von  $\pi_h$ , und ihr Brennpunkt  $F_k$  ist Halbierungspunkt der Strecke  $\overline{PF}_s$  (vgl. Abbildung 3).

Das oben gefundene Ergebnis soll noch dazu ausgewertet werden, Haupt- und Nebenachse einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser konstruktiv zu finden.

Die Gleichung einer Ellipse aus dem hier betrachteten Büschel  $\{\pi\}$  hat die allgemeine Form

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D y = 0 \quad \text{mit} \quad AC - B^2 > 0. \quad (11)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass  $A > 0$  gilt. Dann folgt  $B < 0, C > 0, D < 0$  (vgl. Abb. 2).

Für die Längen der konjugierten Halbmesser findet man

$$|PM| = -\frac{D \sqrt{A^2 + B^2}}{AC - B^2}, \quad |QM| = -\frac{D}{AC - B^2} \quad (12)$$

und für den Krümmungsradius bzw. Durchmesseranstieg

$$\varrho = -\frac{D}{A}, \quad m = -\frac{A}{B}. \quad (13)$$

Wegen  $|PF_h| = \varrho \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$  folgt mit  $|PM| = p, |QM| = q$  und  $|PF_h| = r$  aus (11)–(13) die Gleichung

$$rp = q^2. \quad (14)$$

Mit (14) ist ein konstruktiv wenig aufwendiger Zugang zum Brennpunkt  $F_h$  der Achsenhüllparabel auch bei dieser Vorgabe gesichert.

Abbildung 5 zeigt eine Möglichkeit, wie aus den konjugierten Durchmessern von  $\pi$  unter Einsatz der Achsenhüllparabel Haupt- und Nebenachse von  $\pi$  konstruktiv gefunden werden können.

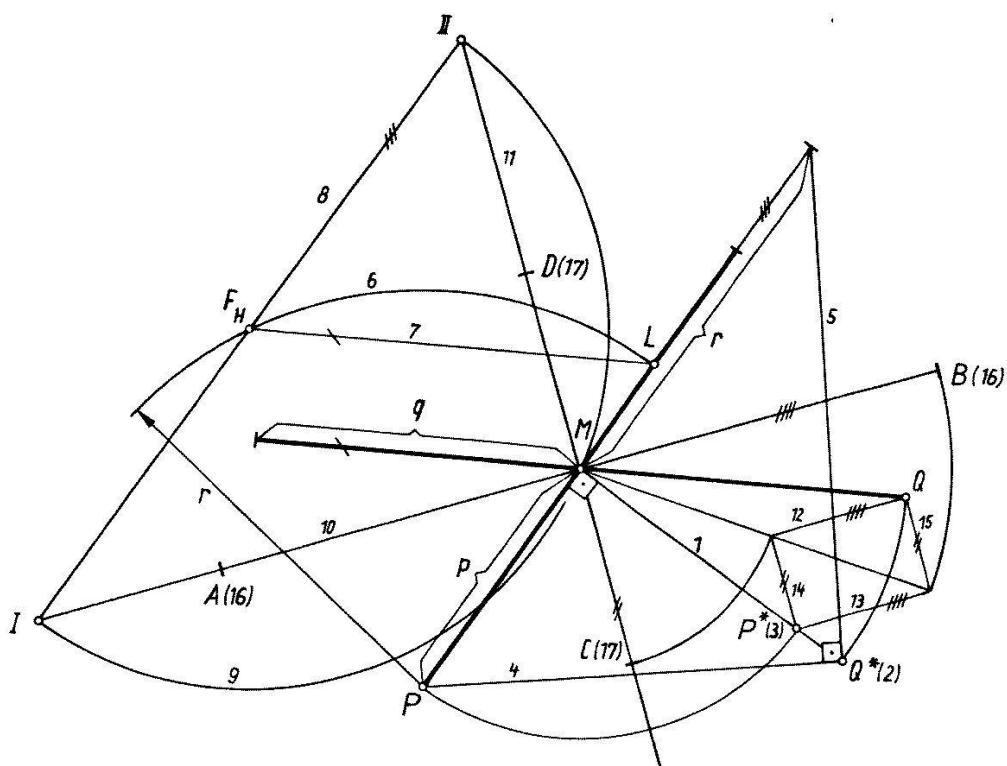


Abb. 5

Im Vergleich zur Rytzschen Konstruktion bietet dieser Lösungsweg vor allem dann den Vorteil grösserer konstruktiver Sicherheit und Genauigkeit, wenn die konjugierten Durchmesser annähernd gleich lang sind und sich unter einem nur wenig von  $\pi/2$  abweichenden Winkel schneiden. In jedem Fall liegen die zum Einsatz gelangenden Konstruktionselemente nach dieser Methode weiter auseinander, ohne dass bei Ausführung der Konstruktion der Rahmen des Bildes gesprengt werden muss.

Abschliessend sollen in die Betrachtung des hyperoskulierenden Kegelschnittbüschels  $\{\kappa\}$  die Krümmungsmittelpunkte  $K_1$  und  $K_2$  der ersten und zweiten Evolute bezüglich  $P$  einbezogen werden. Spiegelt man die Affinnormale  $d$  an der Normalen  $n$  und bringt diese Gerade mit der Parallelen zur Tangente durch  $K$  zum Schnitt, ergibt sich ein Punkt  $H$ . Wird die Strecke  $KH$  über  $H$  hinaus noch zweimal auf der Parallelen abgetragen, so führt diese Konstruktion bekanntlich auf den Krümmungsmittelpunkt  $K_1$  der ersten Evolute (vgl. [2]). Es gilt demnach

$$r_1 = \frac{3\varrho}{m}. \quad (15)$$

Für den Anstieg  $m_1$  der Affinnormalen der ersten Evolute findet man

$$m_1 = \frac{m(\varrho - um)^2 + u(4um - 5\varrho)}{3um(\varrho - um)}. \quad (16)$$

Nach den gleichen Überlegungen wie oben resultiert daraus für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes  $K_2$  der zweiten Evolute

$$K_2 \left( -\frac{3\varrho}{m}, \varrho \left( \frac{3\varrho}{wm} - 2 - \frac{12}{m^2} \right) \right) \quad \text{mit} \quad w = \frac{um(um - \varrho)}{u(1 + m^2) - \varrho m}. \quad (17)$$

Der Mittelpunkt  $M$  von  $\varkappa$  (Schnittpunkt von  $a$  und  $d$ ) hat die Koordinaten

$$M(w, mw) . \quad (18)$$

Führt man  $M$  und  $K_2$  mit Hilfe von Parallelen zur  $x$ -Achse auf die  $y$ -Achse, ergeben sich die Punkte  $U$  bzw.  $V$ . Durchläuft  $M$  die Gerade  $d$ , so wird auch  $K_2$  auf der Geraden mit der Gleichung  $x = -3\rho/m$  seine Lage in bestimmter Weise variieren. Demnach hat man auf der  $y$ -Achse zwei Punktreihen  $\{U\}$  und  $\{V\}$  in vereinigter Lage. Zur analytischen Behandlung der geometrischen Verwandtschaft setzt man für die Ordinaten von  $U$  und  $V$  die Variablen  $\xi$  bzw.  $\eta$  (Abb. 6). Es gilt nach (17) und (18)

$$\xi = w m, \quad \eta = \varrho \left( \frac{3\varrho}{w m} - 2 - \frac{12}{m^2} \right). \quad (19)$$

Durch Eliminieren von  $w = w(u)$  aus (19) erhält man für die geometrische Punktverwandtschaft folgende Gleichung:

$$m^2 \xi \eta + 2 \varrho (6 + m^2) \xi - 3 m^2 \varrho^2 = 0. \quad (20)$$

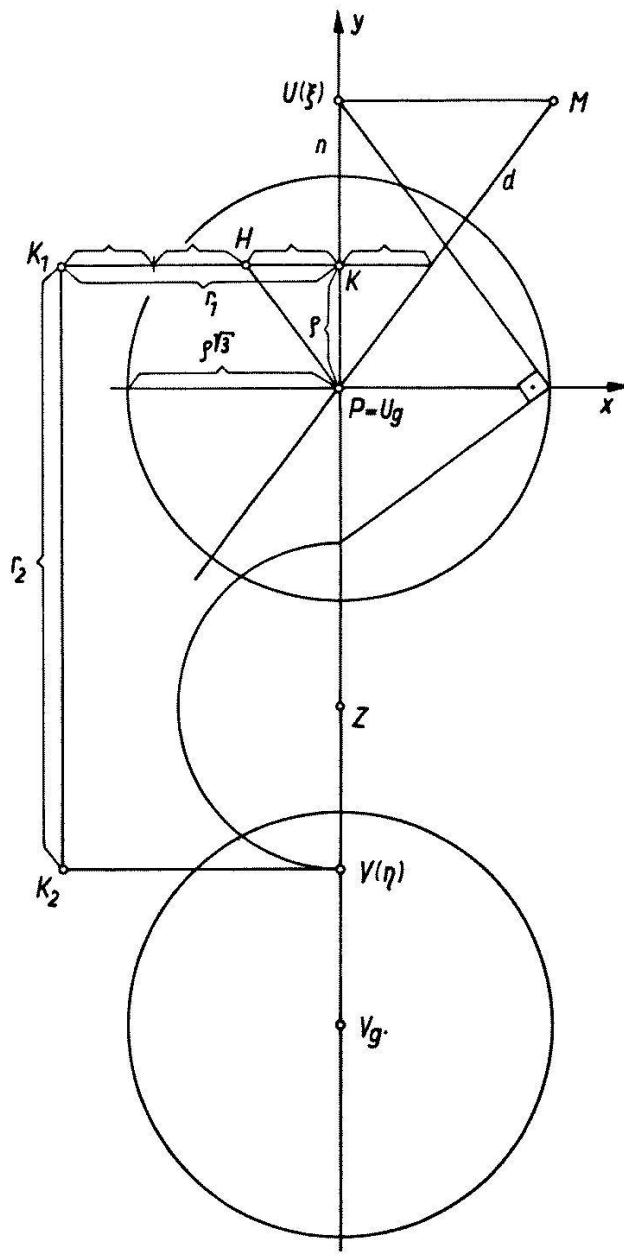


Abb. 6

Nach Gleichung (20) bilden  $\{U\}$  und  $\{V\}$  gegenläufige projektive Punktreihen in vereinigter Lage. Für die Gegenpunkte  $U_g$  und  $V_g$  der Projektivität ergeben sich die Ordinaten

$$\xi_g = 0 \quad \text{bzw.} \quad \eta_g = -\frac{2\varrho(6+m^2)}{m^2}. \quad (21)$$

Mit Hilfe von (21) erhält man für die Potenz dieser Projektivität

$$k^2 = 3\varrho^2 \quad (22)$$

und die Charakteristik der Projektivität

$$\delta = \frac{6+m^2-2\sqrt{G}}{6+m^2+2\sqrt{G}} \quad \text{mit} \quad G = 9+3m^2+m^4. \quad (23)$$

Mit den Ergebnissen (21) und (22) ist ein gut überschaubarer konstruktiver Zugang für jedes beliebige Punktpaar  $\{U, V\}$  und damit auch für die Punktpaare  $\{M, K_2\}$  gesichert (vgl. Abb. 6) (vgl. Sonderfall für Scheitelpunkte in [3]). Bei Vorgabe eines Kegelschnittes  $\varkappa$  (etwa durch dessen Achsen) ist es mit diesen Mitteln möglich, die Krümmungsmittelpunkte  $K, K_1$  und  $K_2$  zu jedem beliebigen Punkt  $P \in \varkappa$  zu konstruieren. Umgekehrt ist auch  $\varkappa$  eindeutig konstruierbar, wenn zu einem Punkt  $P \in \varkappa$  die Krümmungsmitten  $K, K_1$  und  $K_2$  vorgelegt sind.

Eberhard Schröder, Technische Universität Dresden, DDR

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] K. STRUBECKER, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie* (Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1958), S. 33.
- [2] E. KRUPPA, *Analytische und konstruktive Differentialgeometrie* (Springer-Verlag, Wien 1957), S. 102.
- [3] E. SCHRÖDER, *Über Krümmungen höherer Ordnung in den Scheitelpunkten einiger ebener Kurven und deren konstruktive Auswertung* El. Math. 25, 7–13 (1970).

## Kleine Mitteilungen

### Zero-divisors in a ring of arithmetic functions

In [1, p. 247], M. V. Subbarao introduced a convolution in the set  $S$  of all arithmetical functions, which he called ‘exponential convolution’ as follows:

$$(\alpha \circ \beta)(1) = \alpha(1) \beta(1),$$

$$(\alpha \circ \beta)(n) = \sum_{\substack{d_i \mid a_i \\ i=1, 2, \dots, r}} \alpha(p_1^{d_1} \dots p_r^{d_r}) \beta(p_1^{a_1/d_1} \dots p_r^{a_r/d_r}),$$

if  $\alpha, \beta \in S$  and  $n > 1$  has the canonical representation  $n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ .