Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 30 (1975)

Heft: 2

Artikel: Simultanbeweis des Fermatschen und Wilsonschen Satzes

Autor: Stöwener, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-30647

und

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

kann man die noch einfachere Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

verwenden, wo $\frac{1}{4}$ viermal vorkommt und allgemein $\frac{1}{n}$ n-mal vorkommt. Man erhält aus dieser sofort auch die einfache bedingt konvergente Reihe

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots,$$

wobei wieder $\frac{1}{n}-\frac{1}{n}$ genau n-mal angeschrieben werden soll. Dass eine bedingt konvergente Reihe bei einer Umordnung mit einer anderen Summe konvergent werden kann, bereitet dem Schüler Schwierigkeiten beim Verständnis, weil Beispiele dazu oft etwas kompliziert sind. Das folgende Beispiel scheint mir recht einfach zu sein. Offenbar hat die Reihe

$$1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\cdots$$

die Summe Null. Ordnen wir sie ein wenig anders, so entsteht die Reihe

$$-1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\cdots$$

wo $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}$ viermal angeschrieben werden soll und dann $\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}$ achtmal usw. Diese Reihe hat offensichtlich die Summe (-1), also eine Summe $\neq 0$. Natürlich ist es leicht, auch eine divergente Reihe zu erhalten:

$$1-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots.$$

K. Prachar, Wien

Simultanbeweis des Fermatschen und Wilsonschen Satzes

Der Fermatsche Satz $a^{p-1}\equiv 1 \bmod p$ und die Wilsonsche Kongruenz $(p-1)!\equiv -1 \bmod p$ gestatten einen einfachen gemeinsamen Beweis, der ihren inneren Zusammenhang durch eine interessante Identität (1) erkennen lässt.

Sei p eine Primzahl, $a \not\equiv 0 \bmod p$ eine beliebige ganze Zahl und $a_i = a/i$; $1 \leq i \leq p-1$. Dann gilt

$$a_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_{p-1})$$
$$= \frac{a}{1} \frac{a(2-1)}{2} \frac{a(3-1)}{3} \ldots \frac{a(p-2)}{p-1} = \frac{a^{p-1}}{p-1}$$

oder

$$[a_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a_1 - a_{p-1})] (p-1) = a^{p-1} . \tag{1}$$

Die $p-1$ Faktoren in der eckigen Klammer sind mod p ganz und offensichtlich nicht durch p teilbar. Sie sind paarweise inkongruent, denn aus $a_1 \equiv a_1 - a_x$ würde sich $a_x \equiv 0$ und daraus $a \equiv 0$ ergeben, und aus $a_1 - a_x \equiv a_1 - a_y$ würde $a_x \equiv a_y$ und daraus $x \equiv y$ folgen. Das Produkt von $p-1$ paarweise inkongruenten Faktoren, die nicht durch p teilbar sind, ist $\equiv (p-1)!$. Nach (1) gilt somit

$$-(p-1)! \equiv a^{p-1} \bmod p . \tag{2}$$

Die Kongruenz (2) gilt entsprechend unserer Voraussetzung für jede beliebige ganze Zahl $a \not\equiv 0 \bmod p$. Wegen $1 \equiv 1^{p-1}$ folgt daher aus (2)

$$1 \equiv 1^{p-1} \equiv -(p-1)! \equiv a^{p-1} \bmod p .$$

Damit sind beide Titelsätze simultan bewiesen. F. Stöwener, Mannheim

Aufgaben

Aufgabe 713. Give a proof of

$$c(m, n) = \sum_{\substack{d \mid n \\ d \mid m}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) d ,$$

where

$$c(m, n) := \sum_{\substack{1 \leq h \leq n \\ (h, n) = 1}} \exp\left(\frac{2 \pi i h m}{n}\right) ,$$

using only the formula

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad n = 1 \\ 0 & \text{if} \quad n > 1 \end{cases} .$$

D. Suryanarayana, Waltair, India

Lösung: Wir gehen von der bekannten Formel

$$\sum_{k=1}^{d} \exp\left(2 \pi i k \frac{m}{d}\right) = \begin{cases} d & \text{falls} \quad d \mid m \\ 0 & \text{falls} \quad d \nmid m \end{cases}$$