Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1974)
Heft: 6

Artikel: Glücksspiel und Markovketten
Autor: Loeffel, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29908

Since $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$, we have

$$\begin{aligned} P(\alpha_1)\,P(\alpha_2)\,P(\alpha_3) &= \prod_{i=1}^{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\alpha_i}{\pi n}\right)^2\right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{3} \left[1 - \left(\frac{\alpha_i}{\pi n}\right)^2\right] \\ &\le \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{1}{3n}\right)^2\right]^3 \\ &= \left[P\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3, \end{aligned}$$

where we have made another use of the arithmetic-geometric mean inequality.

It is now obvious from this last inequality that

$$\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \le \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^3, \tag{7}$$

which, together with (5), gives

$$\left(\frac{\pi}{3\omega}\right)^2 \ge 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}} \cdot \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)^2. \tag{8}$$

This readily yields (3).

It is easy to see [from (5) and (8)] that if equality holds in (3) then (T) is an equilateral triangle. Conversely, if (T) is equilateral, then equality holds in (3). We finally remark that in addition to being a refinement of (2), the inequality in (3) is a statement about the product of the angles of (T); there do not seem to be many statements of this type in the elementary geometry literature.

Faruk Abi-Khuzam, Syracuse University

REFERENCES

[1] P. Yff, *An Analogue of the Brocard Points*, Amer. Math. Monthly *70* (1963).

Elementarmathematik und Didaktik

Glücksspiel und Markovketten

Zum 350. Geburtstag von Blaise Pascal (1623–1662)

1. Einleitung und Problemstellung

Bereits im 15. und 16. Jahrhundert beschäftigten sich italienische Mathematiker wie Paccioli, Tartaglia und Cardano mit der Analyse von Glücksspielen. Erwähnenswert ist der Franziskanermönch und Mathematikprofessor Fra Luca Paccioli, der vermutlich als erster im Jahre 1494 das Problem aufwarf, welches uns in der Folge beschäftigen wird; eine einwandfreie Lösung erfuhr es allerdings erst rund 150 Jahre später [1].

Im 17. Jahrhundert vergnügten sich viele französische Aristokraten in den feinen Salons mit allerlei Glücksspielen. Chevalier de Méré, ein Freund Pascals, fand seine praktischen Erfahrungen im Abschliessen von Wetten im Widerspruch zu gewissen theoretischen Überlegungen. Diese basierten im herkömmlichen «Proportionaldenken», das sich dann auch als fragwürdig herausstellte. Blaise Pascal und

Pierre Fermat (1601–1665) wurden durch die Anregungen von de Méré in einen spannenden Dialog verwickelt, der in Form eines Briefwechsels der Nachwelt teilweise erhalten blieb.

Der 29. Juli 1654 kann als «Geburtsstunde» der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet werden [2]. Allgemein bekannt dürfte das sogenannte «*problème des dés*» sein. Es geht hier um die Frage, ob die folgenden Ereignisse gleich wahrscheinlich sind:

Mit einem (symmetrischen) Würfel in 4 Würfen mindestens eine Sechs bzw. in 24 Doppelwürfen mindestens eine Doppelsechs zu realisieren.

Weniger bekannt, doch für die weitere Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung von grösserer Tragweite ist die Frage nach der *gerechten Aufteilung des gesamten Einsatzes bei vorzeitigem Abbruch eines Glückspiels.* Dieses sogenannte «problème des parties» soll vorerst am historischen Beispiel vorgestellt werden.

Zwei Spieler A und B leisten je einen Einsatz von $S = 32$ Fr. und vereinbaren folgendes Glücksspiel: Fällt eine symmetrische Münze auf Kopf (K), erhält A einen Punkt zugesprochen, andernfalls der Spieler B. *Wer zum erstenmal 7 Punkte verzeichnen kann,* hat gewonnen und erhält den gesamten Einsatz von $2S = 64$ Fr. Aus irgendeinem Grunde muss das Spiel in dem Augenblick unterbrochen werden, wo A über 5 und B über 4 Punkte verfügt.

In welchem Verhältnis ist nun der Gesamteinsatz gerechterweise unter die beiden Spieler zu verteilen?

Naheliegend, doch kaum zu begründen, sind die beiden Vorschläge «im Verhältnis der erreichten Punkte», d.h. 5:4, oder «im umgekehrten Verhältnis der noch benötigten Punkte», also 3:2. So argumentierte unter anderem Paccioli.

Im nachfolgenden Abschnitt werden die Lösungsansätze von Fermat und Pascal an obigem Beispiel erörtert und dann verallgemeinert. Was die Lösung von Fermat betrifft, sei auch auf das fundamentale Werk «Ars conjectandi» von Jakob Bernoulli verwiesen ([3], S. 106ff.).

2. Klassische Lösungsansätze von Fermat und Pascal

2.1 *Kombinatorische Lösung nach Fermat*

Wir beziehen uns auf das historische Beispiel im vorhergehenden Abschnitt. *Nach Spielabbruch* benötigt A noch 2 und B noch 3 Punkte bis zum Sieg. Wir denken uns jetzt das Spiel in seinen möglichen Verläufen *fiktiv* fortgesetzt.

Wenn A künftighin einen Punkt und B deren zwei zugesprochen erhält (gleichgültig in welcher Reihenfolge), stehen beide unentschieden, da sie je noch einen Punkt bis zum Sieg benötigen. Mit anderen Worten: Nach spätestens 4 Würfen (oder Partien) steht endgültig fest, welcher Spieler den Gesamteinsatz errungen hat.

Die $2^4 = 16$ künftigen, gleichwahrscheinlichen Spielverläufe können wie folgt dargestellt werden (der Buchstabe gibt an, welcher Spieler den Punkt bekommt):

* $AAAA$	* $ABAA$	* $BAAA$	* $BBAA$
* $AAAB$	* $ABAB$	* $BAAB$	$BBAB$
* $AABA$	* $ABBA$	* $BABA$	$BBBA$
* $AABB$	$ABBB$	$BABB$	$BBBB$

Fig. 1

Die mit * versehenen Kombinationen führen zu einem Gewinn von A, da sie den Buchstaben A *mindestens zweimal* enthalten. Ihre Anzahl ist

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 11$$

In 11 von 16 gleichwahrscheinlichen Fällen kann A gewinnen. Somit folgt für die Gewinnwahrscheinlichkeit p_A des Spielers A:

$$p_A = \frac{11}{16} = \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^4}$$

Der totale Einsatz von 64 Fr. ist also im Verhältnis

$$p_A : p_B = p_A : (1 - p_A) = \frac{11}{16} : \frac{5}{16}$$

aufzuteilen.

Wesentlich an dieser Herleitung ist einerseits die *prospektive* Betrachtungsweise und anderseits die Idee, den gesamten Einsatz im Verhältnis von *Wahrscheinlichkeiten* aufzuteilen.

Seien allgemein m und n die bis zum Gewinn fehlenden Punkte des Spielers A bzw. B. Dann ist nach spätestens

$$(m - 1) + (n - 1) + 1 = m + n - 1$$

Partien die endgültige Entscheidung gefallen. Unter den 2^{m+n-1} gleichwahrscheinlichen künftigen Spielabläufen

$$\underbrace{ABA \ldots B \ldots AB}_{(m+n-1)\text{-mal}}$$

führen jene für A zum Sieg, die mindestens m-mal A enthalten. Somit folgt für die *Gewinnwahrscheinlichkeit* p_A des Spielers A

$$p_A = \frac{\sum_{i=m}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i}}{2^{m+n-1}},$$

und der gesamte Einsatz wird im Verhältnis p_A: $(1 - p_A)$ aufgeteilt.

Bemerkenswert ist also die Tatsache, dass das Aufteilungsverhältnis im sogenannten *Pascalschen Dreieck* (triangle arithmétique) abgelesen werden kann. In der Zeile Nummer $m + n - 1$ (immer von 0 an gezählt) werden alle Binomialkoeffizienten aufaddiert, was den Nenner von p_A ergibt. Der Zähler ist die Summe der letzten n Kombinationszahlen.

Für das bereits erwähnte Beispiel $m = 2$, $n = 3$ ist somit $m + n - 1 = 4$ die Nummer der relevanten Zeile.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & \boxed{6 \quad 4 \quad 1} & & & &
\end{array}
\qquad p_A = \frac{6 + 4 + 1}{2^4} = \frac{11}{16}$$

2.2 *Lösungsansatz von Pascal*

Aus dem unter 1. genannten Briefwechsel geht hervor, dass Pascal von der Grundidee des *erwarteten Erlöses* ausging. Dieser ist verantwortlich für die Aufteilung des gesamten Spieleinsatzes. Für beide Spieler kann das *künftige* Geschehen durch einen sogenannten *Spielbaum* veranschaulicht werden. Er stellt einen einfachen, stochastischen Prozess dar (oder eine Lotterie), der mit gewissen Wahrscheinlichkeiten zu einer Auszahlung von 64 Fr. an A bzw. B führt.

Mit (i, j) sei der *Zustand* bezeichnet, in dem der Spieler A noch i und Spieler B noch j Punkte benötigt, bis er den totalen Einsatz $2S$ erhält. Im Zustand $(0, j)$ erhält A den Betrag $2S$ und B nichts, im Zustand $(i, 0)$ hingegen erhält B den Betrag $2S$ und A nichts.

Diese zweite Betrachtungsweise hat den unbestreitbaren Vorteil, dass der prospektive Lösungsansatz einerseits in seinen möglichen Verästelungen durchschaubar wird (Fig. 2) und anderseits die natürliche Verbindung zum modernen Ansatz der stochastischen Prozesse ermöglicht (Abschnitt 3).

Der nachfolgende Baum zeigt alle möglichen künftigen Spielabläufe und zwar *vom Spieler A aus gesehen.*

K A erhält einen Punkt und i wird somit um 1 erniedrigt.

Z B erhält einen Punkt und j wird somit um 1 erniedrigt.

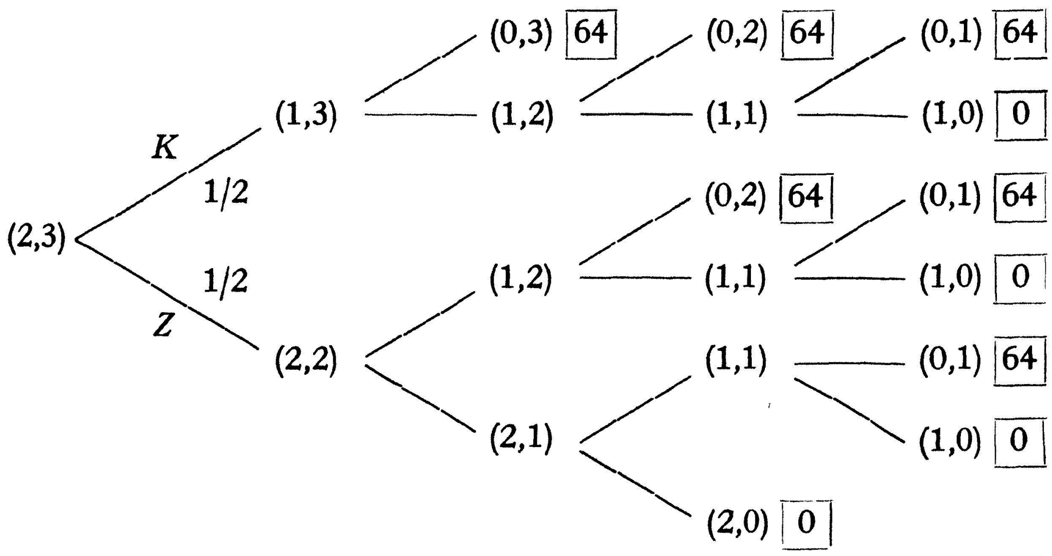

Fig. 2

Wir berechnen nun den erwarteten Erlös $E_A(2,3)$ für A aufgrund obiger Figur. Nach den Regeln der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung folgt:

$$E_A(2,3) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right] \cdot 64$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right] \cdot 0 = \frac{11}{16} \cdot 64 = 44 .$$

Analog erhält man für Spieler B den erwarteten Erlös $E_B(2,3) = 20$. Der totale Einsatz ist somit im Verhältnis $E_A : E_B = 44 : 20 = 11 : 5$ unter die Spieler A und B aufzuteilen.

Allgemein kann man zeigen, dass die Lösungsansätze nach 2.1 und 2.2 zum gleichen Resultat führen. Im übrigen halten wir fest, dass der erwartete Erlös $E_{m,n}$ *für den Spieler* A der folgenden *Differenzengleichung* genügt:

$$2.2.1 \begin{cases} E_{m,n} = \frac{1}{2} \cdot [E_{m-1,n} + E_{m,n-1}] & \text{mit den Randbedingungen} \\ E_{0,n} = 2S \text{ und } E_{m,0} = 0 & \text{für alle positiven } m,n\,. \end{cases}$$

Bemerkung: $E_{m,n}$ könnte auch *iterativ* und ohne Kenntnis einer Formel ermittelt werden, indem man zuerst nach Figur 2 den Spielbaum konstruiert. Jetzt wird von rückwärts her $E_{i,j}$ nach 2.21 sukzessive berechnet («*Rollback-Analyse*»), bis das Verfahren bei $E_{m,n}$ seinen Abschluss findet.

3. Lösung mit Hilfe von Markovketten

Spiel als spezieller stochastischer Prozess (Markovkette)

Figur 2 stellt das künftige Geschehen nach vorzeitigem Abbruch des Spieles als *stochastischen Prozess* dar, der verschiedene sogenannte *Zustände* annehmen kann (siehe auch [4], S. 115f.).

Zum Zeitpunkt $t = 0$ benötigen die beiden Spieler noch m bzw. n Punkte bis zu ihrem Gewinn. Somit ist (m,n) der *Anfangszustand* eines stochastischen Prozesses, der verschiedene Zustände (i,j) durchlaufen kann und spätestens zur Zeit $T = m + n - 1$ zu einem Gewinn für A oder B führt.

Die Menge Z der möglichen Zustände ist wie folgt definiert:

Def. 3.1

$$Z = \{(i,j) \text{ für } i = 0, \ldots, m \text{ und } j = 0, \ldots, n\} - \{(0,0)\},$$

wobei $\{(0,j)\,/\,j = 1, \ldots, n\} = G_A$ bzw.

$\{(i,0)\,/\,i = 1, \ldots, m\} = G_B$

die Gewinnzustände von A bzw. B darstellen.

Für unser Beispiel geht aus Figur 2 hervor:

$$Z = \{(23), (22), (21), (13), (12), (11), G_A, G_B\}.$$

Allgemein gibt es $\varrho = m \cdot n + 2$ verschiedene Zustände.

Befindet sich der Spielprozess zu irgendeiner Zeit t im Zustand (i,j), so geht er im nächsten Zeitpunkt mit Wahrscheinlichkeit 1/2 in den Zustand $(i - 1,j)$ bzw. $(i,j - 1)$ über, je nachdem ob A bzw. B einen Gewinnpunkt zugesprochen erhält. Erreicht der Prozess den Zustand G_A bzw. G_B, so bleibt er dort mit Wahrscheinlichkeit 1.

Bezeichnen wir mit $p_{(i,j)\,(k,l)}$ die sogenannte *Übergangswahrscheinlichkeit*, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich der Prozess zur Zeit $t + 1$ im Zustand (k,l) befindet, wenn er sich zur Zeit t im Zustand (i,j) befand. Nach den vereinbarten Spielregeln folgt:

Def. 3.2

$$p_{(i,j)\,(k,l)} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{1}{2} \text{ für } k = i-1 & \text{und } l = j \\ \frac{1}{2} \text{ für } k = i & \text{und } l = j-1 \end{array}\right\} & \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \\ 1 \text{ für } i = k = 0 \quad \text{oder für} \quad j = l = 0 & \\ 0 \text{ sonst} & \end{cases}$$

In Figur 2 ist zu beachten, dass die Auszahlung von $2S = 64$ Fr. dem Zustand G_A und die Auszahlung 0 dem Zustand G_B in unserer neuen Symbolik entspricht.

Der nachfolgende sogenannte *Transitionsgraph* ([5], S. 41) gibt eine anschauliche Darstellung des Ablaufs unseres stochastischen Prozesses gemäss Def. 3.2.

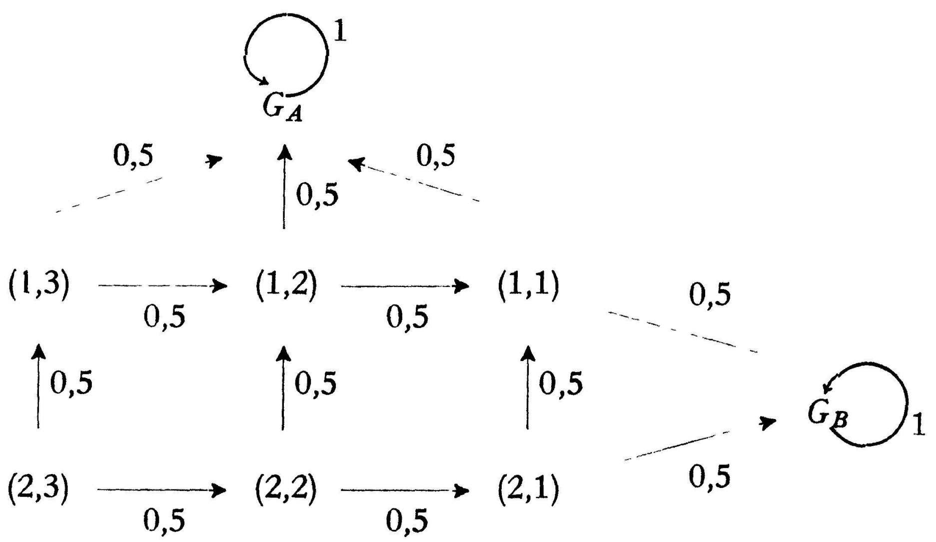

Fig. 3

		z_1 (2,3)	z_2 (2,2)	z_3 (2,1)	z_4 (1,3)	z_5 (1,2)	z_6 (1,1)	z_7 G_A	z_8 G_B
z_1	(2,3)	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0
z_2	(2,2)	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0
z_3	(2,1)	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2
z_4	(1,3)	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0
z_5	(1,2)	0	0	0	0	0	1/2	1/2	0
z_6	(1,1)	0	0	0	0	0	0	1/2	1/2
z_7	G_A	0	0	0	0	0	0	1	0
z_8	G_B	0	0	0	0	0	0	0	1

Fig. 4
Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{(i,j)\,(k,l)}$ für $m = 2$, $n = 3$.

In Figur 4 haben wir eine sogenannte *stochastische Matrix*, d.h. eine quadratische Matrix der Ordnung ϱ mit lauter nicht negativen Zahlen und der Zeilensumme 1. Bezeichnen wir die möglichen Zustände mit z_i ($i = 1, \ldots, \varrho$) und mit $p_{z_i z_k} = p_{ik}$ die Übergangswahrscheinlichkeiten, dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\varrho} p_{ik} = 1 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, \varrho,$$

denn der Prozess geht mit Sicherheit von einem Zustand z_i in irgendeinen Zustand $z_k \in Z$ über.

Def. 3.3

Mit $w_{z_i}(t) = w_i(t)$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Prozess zur Zeit t im Zustand z_i ($i = 1, \ldots, \varrho$) befindet.

Wir suchen nun eine *rekursive Beziehung* für die sogenannten *Zustandswahrscheinlichkeiten* $w_i(t)$. Der Prozess befindet sich zur Zeit $(t + 1)$ im Zustand z_i, wenn er sich unmittelbar vorher in irgendeinem Zustand z_k ($k = 1, \ldots, \varrho$) befindet und dann im nächsten Moment in z_i übergeht. Somit folgt:

Satz 3.1

$$w_i\,(t + 1) = \sum_{k=1}^{\varrho} w_k\,(t) \cdot p_{ki}\,; \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, \varrho \\ t = 0, \ldots, T \end{matrix}$$

An dieser Stelle sei vermerkt, dass unser spezieller stochastischer Prozess in die Kategorie der sogenannten *homogenen Markovketten mit endlich vielen Zuständen* gehört (vgl. [5], S. 19).

Satz 3.1 gestattet uns bei Kenntnis der *Anfangs-Zustandswahrscheinlichkeiten* $w_i(0)$ ($i = 1, \ldots, \varrho$) alle folgenden rekursiv zu ermitteln. Dazu ist die Vektor- und Matrixschreibweise geeignet.

$\overline{w}(t) = [w_1(t), \ldots, w_i(t), \ldots, w_\rho\,(t)]$ Zeilenvektor der Zustandswahrscheinlichkeiten zur Zeit t

$$U_{\rho\rho} = \begin{bmatrix} p_{11} \cdots\cdot p_{1i} \cdots\cdot p_{1\rho} \\ \vdots \\ p_{\rho 1} \cdots\cdot p_{\rho i} \cdots\cdot p_{\rho\rho} \end{bmatrix}$$ stochastische Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

$\overline{w}(0) = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, denn zur Zeit $t = 0$ befindet sich der Prozess mit Sicherheit im Zustand (m, n).

Nun gilt nach der Definition der Matrizenmultiplikation

$$\overline{w}(t + 1) = \overline{w}(t) \cdot U; \quad t = 0, 1, \ldots, T$$

$$\overline{w}(1) = \overline{w}(0) \cdot U$$

$$\overline{w}(2) = \overline{w}(1) \cdot U = \overline{w}(0) \cdot U^2$$

Allgemein gilt:

Satz 3.2 $\boxed{\overline{w}(T) = \overline{w}(0) \cdot U^T \text{ mit } \overline{w}(0) = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad T = m + n - 1}$

Spätestens nach $T = m + n - 1$ Partien, d.h. zur Zeit T befindet sich der Prozess entweder im Zustand G_A (Gewinn für A) oder im Zustand G_B (Gewinn für B).

Bezugnehmend auf den Lösungsansatz von Fermat in 2.1 können wir die Gewinnwahrscheinlichkeiten p_A und p_B als Zustandswahrscheinlichkeiten $w_7(T)$ und $w_8(T)$ interpretieren.

Der Zustandsvektor $\bar{w}(T)$ hat also die Form

$$\bar{w}(T) = [0, 0, \ldots, 0, w_7(T), w_8(T)],$$

und der gesamte Einsatz von $2S = 64$ Fr. ist im Verhältnis $w_7(T) : w_8(T)$ unter die Spieler A und B zu verteilen.

Die Berechnung mit dem Computer (basierend auf einem einfachen BASIC-Programm[1]) hat für unser Beispiel ergeben:

$$\bar{w}(4) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.6875, 0.3125).$$

Somit

$$w_7(4) : w_8(4) = 11 : 5,$$

was mit den Resultaten von Fermat und Pascal übereinstimmt.

4. Zusammenfassung

Vor fast 500 Jahren wurde ein unscheinbares Problem aus der Welt der Glücksspiele aufgeworfen, das *problème des parties*. Anfänglich erfuhr es eine falsche Behandlung, denn die damalige Betrachtungsweise war noch stark im «Proportionaldenken» verhaftet. Erst in der Mitte des 17. Jahrhunderts war die Zeit reif! Die beiden kongenialen Mathematiker Fermat und Pascal fanden unabhängig voneinander richtige Lösungen. Die Freude war gross, so dass Pascal schreiben konnte: «Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris» ([2], S. 77). Gleichzeitig wurden auch die Fundamente der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelegt, der später eine so glanzvolle Entwicklung beschieden sein sollte.

Wesentlich an den beiden Lösungsansätzen ist die *prospektive* Behandlung und die Ausrichtung auf *Wahrscheinlichkeiten* eines künftigen Gewinnes. Während Fermat den *kombinatorischen* Charakter hervorhob («Triangle arithmétique»), arbeitete Pascal, vermutlich als erster, mit dem Begriff des *Erwartungswertes* eines Zufallvorganges oder Lotterie. Die dritte, moderne Art der Lösung besteht in der Interpretation des künftigen Spielgeschehens als spezieller *stochastischer* Prozess, genannt *Markovkette*. Dieser Ansatz lässt sich leicht auf 3 oder mehr Spieler verallgemeinern und auch die numerischen Berechnungen bieten für nicht allzu grosse m und n keine wesentlichen Probleme.

H. Loeffel, St. Gallen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. Bühlmann, *Die «Geburtsstunde» der mathematischen Statistik*, Vjschr. naturf. Ges. Zürich *109*, Heft 3, 1964.

[2] B. Pascal, *Œuvres complètes*, Bibliothèque de la pléiade (Editions Gallimard, 1954).

[3] J. Bernoulli, *Ars conjectandi* (*1713*), Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 107 (Verlag W. Engelmann, Leipzig 1899).

[4] H. Freudenthal, *Wahrscheinlichkeit und Statistik* (Verlag R. Oldenbourg, München, Wien 1963).

[5] F. Ferschl, *Markovketten, Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems, 35* (Springer-Verlag, Berlin 1970).

[1] BASIC ist eine einfache, *problemorientierte* Programmiersprache, die sich besonders zur Lösung von mathematisch-statistischen Aufgaben eignet.