

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 29 (1974)  
**Heft:** 6

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 05.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Über die Summierung von Kosekantenreihen mit Hilfe des Residuensatzes

Herrn Professor Dr. Hans-Joachim Kanold zum 60. Geburtstag

G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD zeigten in [1] und [2], dass Reihen der Form  $\sum (-1)^n / (n^s \sin \alpha n \pi)$  ( $\alpha$  algebraisch,  $s = \sigma + it$ ) für hinreichend grossen Realteil von  $s$  absolut konvergieren und sich in Beziehung zur Doppel-Zeta-Funktion  $\zeta_2$  setzen lassen. In dieser Note soll für natürliche ungerade  $s = 2m + 1$  ( $m \geq 1$ ) und für quadratische Irrationalitäten  $\alpha$  eine Summierung solcher Reihen in endlicher Form gegeben werden.

Es seien  $\alpha$  eine positive algebraische und  $m$  eine natürliche Zahl. Für jede natürliche Zahl  $\nu$  seien  $Q_\nu$  das in der komplexen Zahlenebene gelegene Quadrat mit den Ecken  $(\nu + 1/2) (\pm 1 \pm i)$  und  $N_\nu$  die grösste natürliche Zahl kleiner als  $\alpha(\nu + 1/2)$ . Dann hat die Funktion

$$f(z) = \frac{\pi}{z^{2m+1} \sin \pi z \cdot \sin \alpha \pi z}$$

in  $Q_\nu$  folgende Singularitäten:

- a) einen Pol der Ordnung  $2m + 3$  in  $z = 0$ ,
- b) einfache Pole in den Punkten  $z = \pm n$  ( $n = 1, 2, \dots, \nu$ ),
- c) einfache Pole in den Punkten  $z = \pm n/\alpha$  ( $n = 1, 2, \dots, N_\nu$ ).

Bezeichnet  $\Sigma'$  eine Summe, in der der Index 0 auszulassen ist, so gilt nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_\nu} f(z) dz = \operatorname{res}_{z=0} f + \sum'_{n=-\nu}^{\nu} \operatorname{res}_{z=n} f + \sum'_{n=-N_\nu}^{N_\nu} \operatorname{res}_{z=n/\alpha} f. \quad (1)$$

Auf den horizontalen Seiten von  $Q_\nu$  gilt

$$|\sin \pi z| \geq |\sinh \pi(\nu + 1/2)| \geq \sinh \pi \quad \text{und} \quad |\sin \alpha \pi z| \geq \sinh \alpha \pi,$$

also gilt dort

$$|f| = O\left(\frac{1}{\nu^{2m+1}}\right).$$

Auf den vertikalen Quadratseiten gilt

$$|\sin \pi z| = \cosh(\pi \cdot \operatorname{Im} z) \geq 1.$$

Schwieriger wird die Abschätzung von  $|\sin \alpha \pi z|$  nach unten. Dazu setzen wir

$$\alpha \left(\nu + \frac{1}{2}\right) - k_\nu = \frac{\delta_\nu}{2} \quad \text{mit} \quad |\delta_\nu| \leq 1$$

(d. h.  $k_\nu$  ist die zu  $\alpha(\nu + 1/2)$  nächstgelegene natürliche Zahl) und erhalten

$$\frac{\delta_\nu}{2} = \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 + k_\nu \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) - k_\nu^2}{\frac{1}{\alpha} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) + k_\nu}.$$

Wird ab jetzt  $\alpha$  als quadratische Irrationalität vorausgesetzt, die der Gleichung  $\alpha - 1/\alpha = g$  ( $g$  ganze Zahl) genügt, d. h.

$$\alpha = \frac{\sqrt{g^2 + 4} + g}{2},$$

so lässt sich  $|\delta_\nu/2|$  nichttrivial nach unten abschätzen, da dann der Betrag des Zählers nicht kleiner als  $1/4$  werden kann. Somit ist

$$\left| \frac{\delta_\nu}{2} \right| \geq \frac{A}{\nu},$$

mit einer nur von  $\alpha$  abhängigen Konstanten  $A$ .

Mit  $|2x/\pi| \leq |\sin x|$  für  $|x| \leq \pi/2$  folgt für hinreichend grosses  $\nu$  auf den vertikalen Seiten von  $Q_\nu$

$$|f| = O\left(\frac{1}{\nu^{2m}}\right).$$

Insgesamt gilt also

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_\nu} f(z) dz \right| = O\left(\frac{1}{\nu^{2m-1}}\right),$$

und folglich für  $\nu \rightarrow \infty$  nach (1)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{res}_{z=n} f + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{res}_{z=n/\alpha} f = - \operatorname{res}_{z=0} f. \quad (2)$$

Mit

$$\operatorname{res}_{z=n} f = \frac{(-1)^n}{n^{2m+1} \sin \alpha \pi n}, \quad \operatorname{res}_{z=n/\alpha} f = \frac{(-1)^n \alpha^{2m}}{n^{2m+1} \sin \pi n/\alpha}$$

folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2m+1}} \left( \frac{1}{\sin \alpha \pi n} + \frac{\alpha^{2m}}{\sin \pi n/\alpha} \right) = - \frac{1}{2} \operatorname{res}_{z=0} f. \quad (3)$$

Zur Berechnung von

$$\operatorname{res}_{z=0} f = \frac{1}{(2m+2)!} \frac{d^{2m+2}}{dz^{2m+2}} \left( \frac{\pi z^2}{\sin \pi z \cdot \sin \alpha \pi z} \right) \Big|_{z=0}$$

verwendet man zweckmässig die Potenzreihenentwicklung von  $\pi x/\sin \pi x$  und erhält nach leichter Rechnung ( $B_{2\mu}$  sind die Bernoulli-Zahlen)

$$\begin{aligned} R(m, \alpha) &:= - \frac{1}{2} \operatorname{res}_{z=0} f \\ &= \frac{(-1)^m \pi^{2m+1}}{2\alpha} \sum_{\mu=0}^{m+1} \frac{(2^{2\mu} - 2)(2^{2m+2-2\mu} - 2)\alpha^{2\mu}}{(2\mu)!(2m+2-2\mu)!} B_{2\mu} B_{2m+2-2\mu}. \end{aligned} \quad (4)$$

Mit (3) und (4) ist die geschlossene Summierbarkeit gewisser Kosekantenreihen gezeigt.

Speziell folgt für  $g \equiv 0 \pmod{2}$ , also  $\alpha = \sqrt{j^2 + 1} + j$  ( $j$  ganz), wegen  $\sin \pi n/\alpha = \sin \alpha \pi n = (-1)^{nj} \sin(\pi n \sqrt{j^2 + 1})$  die Summenformel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(j+1)}}{n^{2m+1} \sin(\pi n \sqrt{j^2 + 1})} = \frac{R(m, \sqrt{j^2 + 1} + j)}{1 + (\sqrt{j^2 + 1} + j)^{2m}}. \tag{5}$$

Für  $j = 2q$  ( $q \neq 0$ ) bzw.  $j = 2q + 1$  ergeben sich Summationsformeln mit bzw. ohne alternierendes Vorzeichen. G. Bach, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Some problems of diophantine approximation: The lattice points of a right angled triangle*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 20, 15–36 (1922).  
 [2] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Some problems of diophantine approximation: A series of cosecants*, Bull. Calcutta Math. Soc. 20, 251–266 (1930).

**Proof of Yff's Conjecture on the Brocard Angle of a Triangle**

Let  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  be the three angles of a triangle ( $T$ ), and let  $\omega$  be the Brocard angle of ( $T$ ). One formula for  $\omega$  is

$$\csc^2 \omega = \csc^2 \alpha_1 + \csc^2 \alpha_2 + \csc^2 \alpha_3, \tag{1}$$

and the inequality

$$\omega \leq \frac{\pi}{6} \tag{2}$$

is well known.

Yff [1] p. 500 conjectured that  $\omega$  satisfies the inequality

$$8 \omega^3 \leq \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3. \tag{3}$$

We here give a proof of (3).

The function  $(\sin x)/x$  decreases steadily in the interval  $0 < x < \pi/2$ ; this together with (2) implies that

$$\frac{\sin \omega}{\omega} \geq \frac{3}{\pi}. \tag{4}$$

Combining (4) and (1) and applying the familiar inequality between the arithmetic and geometric mean, we obtain

$$\left(\frac{\pi}{3\omega}\right)^2 \geq \csc^2 \omega \geq 3 \left(\sqrt[3]{\csc \alpha_1 \csc \alpha_2 \csc \alpha_3}\right)^2 \tag{5}$$

and it remains to find a sharp upper bound for the product  $\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3$ . To do this consider the representation formula

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{x}{\pi n}\right)^2\right] = xP(x). \tag{6}$$

Since  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$ , we have

$$\begin{aligned} P(\alpha_1) P(\alpha_2) P(\alpha_3) &= \prod_{i=1}^3 \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_i}{\pi n} \right)^2 \right] \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^3 \left[ 1 - \left( \frac{\alpha_i}{\pi n} \right)^2 \right] \\ &\leq \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3n} \right)^2 \right]^3 \\ &= \left[ P \left( \frac{\pi}{3} \right) \right]^3 = \left( \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \right)^3, \end{aligned}$$

where we have made another use of the arithmetic-geometric mean inequality.

It is now obvious from this last inequality that

$$\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \leq \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left( \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \right)^3, \quad (7)$$

which, together with (5), gives

$$\left( \frac{\pi}{3\omega} \right)^2 \geq 3 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}} \cdot \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right)^2. \quad (8)$$

This readily yields (3).

It is easy to see [from (5) and (8)] that if equality holds in (3) then  $(T)$  is an equilateral triangle. Conversely, if  $(T)$  is equilateral, then equality holds in (3). We finally remark that in addition to being a refinement of (2), the inequality in (3) is a statement about the product of the angles of  $(T)$ ; there do not seem to be many statements of this type in the elementary geometry literature.

Faruk Abi-Khuzam, Syracuse University

#### REFERENCES

- [1] P. YFF, *An Analogue of the Brocard Points*, Amer. Math. Monthly 70 (1963).

## Elementarmathematik und Didaktik

### Glücksspiel und Markovketten

Zum 350. Geburtstag von Blaise Pascal (1623–1662)

#### 1. Einleitung und Problemstellung

Bereits im 15. und 16. Jahrhundert beschäftigten sich italienische Mathematiker wie Paccioli, Tartaglia und Cardano mit der Analyse von Glücksspielen. Erwähnenswert ist der Franziskanermönch und Mathematikprofessor Fra Luca Paccioli, der vermutlich als erster im Jahre 1494 das Problem aufwarf, welches uns in der Folge beschäftigen wird; eine einwandfreie Lösung erfuhr es allerdings erst rund 150 Jahre später [1].

Im 17. Jahrhundert vergnügten sich viele französische Aristokraten in den feinen Salons mit allerlei Glücksspielen. Chevalier de Méré, ein Freund Pascals, fand seine praktischen Erfahrungen im Abschliessen von Wetten im Widerspruch zu gewissen theoretischen Überlegungen. Diese basierten im herkömmlichen «Proportionaldenken», das sich dann auch als fragwürdig herausstellte. Blaise Pascal und