Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 29 (1974)

Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

From this it follows that $f(x) = -f(x^{-1})$ or $f(x) = -\omega f(x^{-1})$ or $f(x) = -\omega^2 f(x^{-1})$.

It is not necessary that $f(x) = -f(x^{-1})$ for each x in G. This shows some of the difficulties in the problem of determining the solution of (2) when f is complex-valued.

Ih-ching Hsu, St. Olaf College, Northfield, MN, USA

REFERENCES

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications* (Academic Press, New York-London 1966).

[2] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. 3 (Van Nostrand, Princeton, N. J. 1964).

[3] O. Taussky, *Sums of Squares*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 805–830.

Kleine Mitteilungen

Über die Chordalkurve zweier Kegelschnitte

Die Hüllkurve der Geraden, die aus zwei Kegelschnitten k_1, k_2 Sehnen gleicher Länge ausschneiden, heisse die Chordalkurve von k_1 und k_2.

1. **Die Chordalparabel zweier Kreise** k_1, k_2 (Mittelpunkte K_1, K_2, Radien r_1, r_2). Es sei $K_1 \neq K_2$. Mittelpunkt von K_1K_2 sei F. Die Chordale von k_1 und k_2 sei s. Eine Gerade g habe von K_1 bzw. K_2 die Abstände p_1 bzw. p_2. Die Normale aus F auf g schliesse mit K_1K_2 den Winkel α ein und schneide s im Punkt G. Es ist $\overline{FG} = (p_1 + p_2)/2$. Die von g aus k_1 und k_2 geschnittenen Sehnen sind gleich lang, wenn $r_1^2 - p_1^2 = r_2^2 - p_2^2$ ist. Daraus folgt $(p_2 + p_1)(p_2 - p_1) = r_2^2 - r_1^2$ oder $2 \cdot \overline{FG} \cdot \overline{K_1K_2} \cdot \cos\alpha = r_2^2 - r_1^2$; daher ist $\overline{FG} \cdot \cos\alpha$ konstant. Alle G liegen auf s, denn für $\alpha = 0$ ist $g \equiv s$. Es folgt:

Satz 1. *Alle Geraden, die die (nichtkonzentrischen) Kreise k_1, k_2 nach längengleichen Sehnen schneiden, umhüllen für $r_1 \neq r_2$ die «Chordalparabel» p von k_1 und k_2 (Brennpunkt F, Scheiteltangente s). p berührt auch die gemeinsamen Tangenten von k_1 und k_2.* Für $r_1 = r_2$ zerfällt p (als Klassenkurve) in das Strahlbüschel F und in das Büschel der zu K_1K_2 parallelen Geraden.

g schneidet nur dann reelle Sehnen aus k_1 und k_2, wenn $|r_1 - r_2| \leqq 2 \cdot \overline{FG} \leqq r_1 + r_2$ ist; die Intervallgrenzen gehören zu den gemeinsamen Tangenten von k_1 und k_2; existieren 4 bzw. 2 bzw. 0 reelle gemeinsame Tangenten von k_1 und k_2, so gibt es 2 bzw. 1 bzw. 0 Bögen auf p, deren Punkte Tangenten g mit reellen Sehnen von k_1 und k_2 besitzen.

Da p durch F und s bestimmt ist, gilt die Umkehrung von Satz 1:

Satz 2. *Eine Parabel p ist Chordalparabel je zweier Kreise, die sich auf der Scheiteltangente von p schneiden und deren Mitten auf der Parabelachse symmetrisch zum Brennpunkt von p liegen.*

2. **Die Chordalgeraden dreier Kreise** k_i (Mitten K_i, Radien r_i). Die Chordalparabel von k_i und k_j sei p_{ij} (Brennpunkt F_{ij} = Mitte von K_iK_j, Scheiteltangente s_{ij} = Chordale von k_i und k_j). Eine eigentliche gemeinsame Tangente von p_{12} und p_{13} schneidet k_1 und k_2, ebenso k_1 und k_3, daher auch k_2 und k_3 nach längengleichen Sehnen. Sie berührt also auch p_{23}. Eine solche Gerade, die die k_i nach drei längengleichen Sehnen schneidet, heisse eine Chordalgerade der k_i.

Satz 3. *Die drei Chordalparabeln, die von drei Kreisen k_i paarweise bestimmt werden, gehören einer linearen Schar an. Sind K_1, K_2, K_3 nicht kollinear, so haben die k_i drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Chordalgeraden, nämlich die eigentlichen Grundtangenten der Schar. Sie bilden* (nach dem Satz von Lambert) *ein Dreieck, dessen Umkreis der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks $K_1K_2K_3$ ist.* Für $r_1 = r_2 = r_3$ sind $F_{12}F_{23}$, $F_{23}F_{31}$, $F_{31}F_{12}$ die Chordalgeraden.

Satz 4. *Liegen K_1, K_2, K_3 auf einer Geraden, so gibt es i. allg. zwei Chordalgeraden der k_i. Sie gehen durch das gemeinsame Ähnlichkeitszentrum A der drei Chordalparabeln.* Für $r_1 = r_2 = r_3$ ist A Fernpunkt, und jede Gerade durch A ist Chordalgerade der k_i.

3. **Die Chordalkurve zweier beliebiger Kegelschnitte** k_1 und k_2, die in homogenen kartesischen Koordinaten x_0, x_1, x_2 (Ferngerade $x_0 = 0$) durch $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0$ bzw. $\sum_{i,j=0}^{2} b_{ij} x_i x_j = 0$ gegeben sind. Eine Gerade g $(\sum_{i=0}^{2} u_i x_i = 0)$ schneidet k_1 in zwei Punkten; für deren Abstand s_1 ergibt sich

$$s_1^2 = -4\,(u_1^2 + u_2^2) \cdot \sum A_{ij} u_i u_j / (a_{22} u_1^2 - 2a_{12} u_1 u_2 + a_{11} u_2^2)^2 \tag{1}$$

(A_{ij} = algebraisches Komplement von a_{ij} in der Determinante $A = |\, a_{ij} \,|_0^2$; man muss nicht $A \neq 0$ voraussetzen). Nach (1) ist $s_1 = 0$, wenn g eine Tangente von k_1 oder eine Minimalgerade ist. Der Nenner in (1) ergibt nullgesetzt das doppeltgezählte Paar der Fernpunkte von k_1. Ist s_1 fest, so stellt (1) die Kurve dar, deren Tangenten aus k_1 Sehnen von der Länge s_1 ausschneiden. Sie ist i. allg. von 4. Klasse, jedoch von 2. Klasse, und zwar ein Kreis, wenn k_1 ein Kreis ist (für $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ spaltet sich $u_1^2 + u_2^2 = 0$, das Paar der Minimalstrahlbüschel, ab).

g schneide aus k_2 eine Sehne von der Länge s_2. Die Bedingung $s_1^2 = s_2^2$ ergibt aus (1) nach Abspaltung von $u_1^2 + u_2^2 = 0$ (mit $s_1^2 = s_2^2 = 0$) die Gleichung

$$(b_{22} u_1^2 - 2b_{12} u_1 u_2 + b_{11} u_2^2)^2 \cdot \sum A_{ij} u_i u_j - (a_{22} u_1^2 - 2a_{12} u_1 u_2 + a_{11} u_2^2)^2 \cdot \sum B_{ij} u_i u_j = 0 \tag{2}$$

der Chordalkurve von k_1 und k_2. Sie ist i. allg. von 6. Klasse.

Haben k_1 und k_2 einen Fernpunkt I gemein, so spaltet sich nach (2) das Strahlbüschel I doppeltzählend ab; es bleibt eine Chordalkurve 4. Klasse. Haben k_1 und k_2 beide Fernpunkte I, J gemein, so spalten sich nach (2) die Strahlbüschel I, J doppeltzählend ab. Normiert man dann $b_{22} = a_{22}$, $b_{12} = a_{12}$, $b_{11} = a_{11}$, so lautet die Chordalkurve

$$\sum (A_{ij} - B_{ij})\, u_i u_j = 0. \tag{3}$$

Sie hat hier die Klasse 2 und ist wegen $A_{00} - B_{00} = 0$ eine Parabel. Daher:

Satz 5. *Die Chordalkurve zweier Kegelschnitte k_1, k_2 mit gemeinsamen Fernpunkten I, J ist eine Parabel p. Sie berührt die gemeinsamen Tangenten von k_1 und k_2 und die Verbindungsgerade s der beiden eigentlichen Schnittpunkte von k_1 und k_2. Die Fernpunkte von s und p liegen harmonisch zu I und J. Ist $I = J$, sind also k_1 und k_2 Parabeln mit parallelen Achsen, so ist ihr Fernpunkt auch Fernpunkt von p.* (Im Fall $I \neq J$ ist Satz 5 affine Verallgemeinerung von Satz 1.)

Fritz Hohenberg, Graz