**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 29 (1974)
**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.10.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

From this it follows that $f(x) = -f(x^{-1})$ or $f(x) = -\omega f(x^{-1})$ or $f(x) = -\omega^2 f(x^{-1})$.

It is not necessary that $f(x) = -f(x^{-1})$ for each $x$ in $G$. This shows some of the difficulties in the problem of determining the solution of (2) when $f$ is complex-valued.

Ih-ching Hsu, St. Olaf College, Northfield, MN, USA

REFERENCES

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and their Applications* (Academic Press, New York-London 1966).
[2] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Vol. 3 (Van Nostrand, Princeton, N. J. 1964).
[3] O. Taussky, *Sums of Squares*, Amer. Math. Monthly 77 (1970), 805–830.

# Kleine Mitteilungen

## Über die Chordalkurve zweier Kegelschnitte

Die Hüllkurve der Geraden, die aus zwei Kegelschnitten $k_1$, $k_2$ Sehnen gleicher Länge ausschneiden, heisse die Chordalkurve von $k_1$ und $k_2$.

1. **Die Chordalparabel zweier Kreise** $k_1$, $k_2$ (Mittelpunkte $K_1$, $K_2$, Radien $r_1, r_2$). Es sei $K_1 \neq K_2$. Mittelpunkt von $K_1 K_2$ sei $F$. Die Chordale von $k_1$ und $k_2$ sei $s$. Eine Gerade $g$ habe von $K_1$ bzw. $K_2$ die Abstände $p_1$ bzw. $p_2$. Die Normale aus $F$ auf $g$ schliesse mit $K_1 K_2$ den Winkel $\alpha$ ein und schneide $s$ im Punkt $G$. Es ist $\overline{FG} = (p_1 + p_2)/2$. Die von $g$ aus $k_1$ und $k_2$ geschnittenen Sehnen sind gleich lang, wenn $r_1^2 - p_1^2 = r_2^2 - p_2^2$ ist. Daraus folgt $(p_2 + p_1)(p_2 - p_1) = r_2^2 - r_1^2$ oder $2 \cdot \overline{FG} \cdot \overline{K_1 K_2} \cdot \cos\alpha = r_2^2 - r_1^2$; daher ist $\overline{FG} \cdot \cos\alpha$ konstant. Alle $G$ liegen auf $s$, denn für $\alpha = 0$ ist $g \equiv s$. Es folgt:

**Satz 1.** *Alle Geraden, die die (nichtkonzentrischen) Kreise $k_1$, $k_2$ nach längengleichen Sehnen schneiden, umhüllen für $r_1 \neq r_2$ die «Chordalparabel» $p$ von $k_1$ und $k_2$ (Brennpunkt $F$, Scheiteltangente $s$). $p$ berührt auch die gemeinsamen Tangenten von $k_1$ und $k_2$.* Für $r_1 = r_2$ zerfällt $p$ (als Klassenkurve) in das Strahlbüschel $F$ und in das Büschel der zu $K_1 K_2$ parallelen Geraden.

$g$ schneidet nur dann reelle Sehnen aus $k_1$ und $k_2$, wenn $|r_1 - r_2| \leqq 2 \cdot \overline{FG} \leqq r_1 + r_2$ ist; die Intervallgrenzen gehören zu den gemeinsamen Tangenten von $k_1$ und $k_2$; existieren 4 bzw. 2 bzw. 0 reelle gemeinsame Tangenten von $k_1$ und $k_2$, so gibt es 2 bzw. 1 bzw. 0 Bögen auf $p$, deren Punkte Tangenten $g$ mit reellen Sehnen von $k_1$ und $k_2$ besitzen.

Da $p$ durch $F$ und $s$ bestimmt ist, gilt die Umkehrung von Satz 1:

**Satz 2.** *Eine Parabel $p$ ist Chordalparabel je zweier Kreise, die sich auf der Scheiteltangente von $p$ schneiden und deren Mitten auf der Parabelachse symmetrisch zum Brennpunkt von $p$ liegen.*

2. **Die Chordalgeraden dreier Kreise** $k_i$ (Mitten $K_i$, Radien $r_i$). Die Chordalparabel von $k_i$ und $k_j$ sei $p_{ij}$ (Brennpunkt $F_{ij}$ = Mitte von $K_i K_j$, Scheiteltangente $s_{ij}$ = Chordale von $k_i$ und $k_j$). Eine eigentliche gemeinsame Tangente von $p_{12}$ und $p_{13}$ schneidet $k_1$ und $k_2$, ebenso $k_1$ und $k_3$, daher auch $k_2$ und $k_3$ nach längengleichen Sehnen. Sie berührt also auch $p_{23}$. Eine solche Gerade, die die $k_i$ nach drei längengleichen Sehnen schneidet, heisse eine Chordalgerade der $k_i$.

**Satz 3.** *Die drei Chordalparabeln, die von drei Kreisen $k_i$ paarweise bestimmt werden, gehören einer linearen Schar an. Sind $K_1$, $K_2$, $K_3$ nicht kollinear, so haben die $k_i$ drei (nicht notwendig voneinander verschiedene) Chordalgeraden, nämlich die eigentlichen Grundtangenten der Schar. Sie bilden* (nach dem Satz von Lambert) *ein Dreieck, dessen Umkreis der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks $K_1K_2K_3$ ist.* Für $r_1 = r_2 = r_3$ sind $F_{12}F_{23}$, $F_{23}F_{31}$, $F_{31}F_{12}$ die Chordalgeraden.

**Satz 4.** *Liegen $K_1$, $K_2$, $K_3$ auf einer Geraden, so gibt es i. allg. zwei Chordalgeraden der $k_i$. Sie gehen durch das gemeinsame Ähnlichkeitszentrum $A$ der drei Chordalparabeln.* Für $r_1 = r_2 = r_3$ ist $A$ Fernpunkt, und jede Gerade durch $A$ ist Chordalgerade der $k_i$.

3. **Die Chordalkurve zweier beliebiger Kegelschnitte** $k_1$ und $k_2$, die in homogenen kartesischen Koordinaten $x_0, x_1, x_2$ (Ferngerade $x_0 = 0$) durch $\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} x_i x_j = 0$ bzw. $\sum_{i,j=0}^{2} b_{ij} x_i x_j = 0$ gegeben sind. Eine Gerade $g$ $(\sum_{i=0}^{2} u_i x_i = 0)$ schneidet $k_1$ in zwei Punkten; für deren Abstand $s_1$ ergibt sich

$$s_1^2 = -4\,(u_1^2 + u_2^2) \cdot \sum A_{ij}\, u_i\, u_j / (a_{22}\, u_1^2 - 2a_{12}\, u_1\, u_2 + a_{11}\, u_2^2)^2 \tag{1}$$

($A_{ij}$ = algebraisches Komplement von $a_{ij}$ in der Determinante $A = |\, a_{ij}\,|_0^2$; man muss nicht $A \neq 0$ voraussetzen). Nach (1) ist $s_1 = 0$, wenn $g$ eine Tangente von $k_1$ oder eine Minimalgerade ist. Der Nenner in (1) ergibt nullgesetzt das doppeltgezählte Paar der Fernpunkte von $k_1$. Ist $s_1$ fest, so stellt (1) die Kurve dar, deren Tangenten aus $k_1$ Sehnen von der Länge $s_1$ ausschneiden. Sie ist i. allg. von 4. Klasse, jedoch von 2. Klasse, und zwar ein Kreis, wenn $k_1$ ein Kreis ist (für $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ spaltet sich $u_1^2 + u_2^2 = 0$, das Paar der Minimalstrahlbüschel, ab).

$g$ schneide aus $k_2$ eine Sehne von der Länge $s_2$. Die Bedingung $s_1^2 = s_2^2$ ergibt aus (1) nach Abspaltung von $u_1^2 + u_2^2 = 0$ (mit $s_1^2 = s_2^2 = 0$) die Gleichung

$$(b_{22}\, u_1^2 - 2b_{12}\, u_1\, u_2 + b_{11}\, u_2^2)^2 \cdot \sum A_{ij}\, u_i\, u_j - (a_{22}\, u_1^2 - 2a_{12}\, u_1\, u_2 + a_{11}\, u_2^2)^2 \cdot \sum B_{ij}\, u_i\, u_j = 0 \tag{2}$$

der Chordalkurve von $k_1$ und $k_2$. Sie ist i. allg. von 6. Klasse.

Haben $k_1$ und $k_2$ einen Fernpunkt $I$ gemein, so spaltet sich nach (2) das Strahlbüschel $I$ doppeltzählend ab; es bleibt eine Chordalkurve 4. Klasse. Haben $k_1$ und $k_2$ beide Fernpunkte $I, J$ gemein, so spalten sich nach (2) die Strahlbüschel $I, J$ doppeltzählend ab. Normiert man dann $b_{22} = a_{22}$, $b_{12} = a_{12}$, $b_{11} = a_{11}$, so lautet die Chordalkurve

$$\sum (A_{ij} - B_{ij})\, u_i\, u_j = 0. \tag{3}$$

Sie hat hier die Klasse 2 und ist wegen $A_{00} - B_{00} = 0$ eine Parabel. Daher:

**Satz 5.** *Die Chordalkurve zweier Kegelschnitte $k_1$, $k_2$ mit gemeinsamen Fernpunkten $I, J$ ist eine Parabel $p$. Sie berührt die gemeinsamen Tangenten von $k_1$ und $k_2$ und die Verbindungsgerade $s$ der beiden eigentlichen Schnittpunkte von $k_1$ und $k_2$. Die Fernpunkte von $s$ und $p$ liegen harmonisch zu $I$ und $J$. Ist $I = J$, sind also $k_1$ und $k_2$ Parabeln mit parallelen Achsen, so ist ihr Fernpunkt auch Fernpunkt von $p$.* (Im Fall $I \neq J$ ist Satz 5 affine Verallgemeinerung von Satz 1.)

Fritz Hohenberg, Graz