

# A note on Bernoulli numbers and polynomials

Autor(en): **Carlitz, L.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **29 (1974)**

Heft 4

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-29900>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## A note on Bernoulli numbers and polynomials

Put

$$S_k = S_k(n) = \sum_{a=0}^{n-1} a^k.$$

It is well known that

$$S_1^2 = S_3, \quad 2 S_1^4 = S_5 + S_7. \quad (1)$$

The general formula of this type was found by Stern [1, p. 20]:

$$2^{m-1} S_1^m = \sum_{2j < m} \binom{m}{2j+1} S_{2m-2j-1}. \quad (2)$$

We recall that [2, Ch. 2]

$$S_k(n) = \frac{B_{k+1}(n) - B_{k+1}}{k+1}, \quad (3)$$

where  $B_{k+1}(n)$  is the Bernoulli polynomial of degree  $k+1$  and  $B_{k+1} = B_{k+1}(0)$ . The Bernoulli polynomial may be defined by

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!}. \quad (4)$$

Substituting from (3) in (2) we get

$$2^{m-1} S_1^m = \sum_{2j < m} \binom{m}{2j+1} \frac{B_{2m-2j}(n) - B_{2m-2j}}{2m-2j}. \quad (5)$$

Since  $S_1 = n(n-1)/2$ , it is clear that (5) is a polynomial identity for  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Therefore we may write

$$(x(x-1))^m = 2 \sum_{2j < m} \binom{m}{2j+1} \frac{B_{2m-2j}(x) - B_{2m-2j}}{2m-2j}.$$

Since  $B'_m(x) = mB_{m-1}(x)$ , it follows that

$$m(2x-1)(x(x-1))^{m-1} = 2 \sum_{2j < m} \binom{m}{2j+1} B_{2m-2j-1}(x). \quad (6)$$

Conversely integration of (6) gives (5).

A slightly simpler formula is

$$(m+1)(x-1/2)^m = \sum_{2j \leq m} \binom{m+1}{2j+1} 2^{-2j} B_{m-2j}(x). \quad (7)$$

To prove (7) we make use of (4). Clearly

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!} = \frac{ze^{(x-1/2)z}}{e^{z/2} - e^{-z/2}},$$

so that

$$ze^{(x-1/2)z} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x) \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Equating coefficients of  $z^{m+1}$ , we get (7).

Next we recall the expansion [2, p. 28]

$$B_k(x) = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} 2^{-s} D_s (x - 1/2)^{k-s} \quad (8)$$

where

$$D_k = 2^k B_k(1/2) = 2(1 - 2^{k-1}) B_k. \quad (9)$$

It follows from (9) that

$$D_{2k+1} = 0, \quad (-1)^k D_{2k} > 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

The first few values are

$$D_0 = 1, \quad D_2 = -\frac{1}{3}, \quad D_4 = \frac{7}{15}, \quad D_6 = -\frac{31}{21}.$$

Thus (7) and (8) are an inverse pair. It is convenient to consider separately even and odd values of  $m$  and  $k$ . Replacing  $m$  by  $2m$ , (7) becomes

$$(2m+1) (x - 1/2)^{2m} = \sum_{j=0}^m \binom{2m+1}{2j} 2^{-2m+2j} B_{2j}(x). \quad (11)$$

Similarly, by (8) and (10)

$$B_{2k}(x) = \sum_{s=0}^k \binom{2k}{2s} 2^{-2k+2s} D_{2k-2s} (x - 1/2)^{2s}. \quad (12)$$

Substituting from (12) in (11), we get

$$(2m+1) (x - 1/2)^{2m} = \sum_{j=0}^m \binom{2m+1}{2j} 2^{-2m} \sum_{s=0}^j \binom{2j}{2s} 2^{2s} D_{2j-2s} (x - 1/2)^{2s},$$

so that

$$\sum_{j=s}^m \binom{2m+1}{2j} \binom{2j}{2s} 2^{2s} D_{2j-2s} = (2m+1) 2^{2m} \delta_{m,s}. \quad (13)$$

For odd values of the parameters, (7) and (8) yield

$$(2m+2) (x - 1/2)^{2m+1} = \sum_{j=0}^m \binom{2m+2}{2j+1} 2^{-2m+2j} B_{2j+1}(x), \quad (14)$$

and

$$B_{2k+1}(x) = \sum_{s=0}^k \binom{2k+1}{2s+1} 2^{-2k+2s} D_{2k-2s} (x - 1/2)^{2s+1}, \quad (15)$$

respectively. Hence

$$(2m+2) (x - 1/2)^{2m+1} = \sum_{j=0}^m \binom{2m+2}{2j+1} 2^{-2m} \sum_{s=0}^j \binom{2j+1}{2s+1} 2^{2s} D_{2j-2s} (x - 1/2)^{2s+1},$$

so that

$$\sum_{j=s}^m \binom{2m+2}{2j+1} \binom{2j+1}{2s+1} 2^{2s} D_{2j-2s} = (2m+2) 2^{2m} \delta_{m,s}. \quad (16)$$

The formulas (13), (16) evidently imply the following matrix formulas:

$$\left[ \binom{2m+1}{2s} \right] \left[ \binom{2m}{2s} 2^{2s} D_{2m-2s} \right] = \left[ (2m+1) 2^{2m} \delta_{m,s} \right], \quad (17)$$

$$\left[ \binom{2m+2}{2s+1} \right] \left[ \binom{2m+1}{2s+1} 2^{2s} D_{2m-2s} \right] = \left[ (2m+2) 2^{2m} \delta_{m,s} \right], \quad (18)$$

where  $m, s = 0, 1, 2, \dots, N-1$  and  $N$  is either a positive integer or infinity. Thus in particular we have found inverses of the matrices

$$\left[ \binom{2m+1}{2s} \right], \quad \left[ \binom{2m+2}{2s+1} \right] \quad (m, s = 0, 1, 2, \dots, N-1). \quad (19)$$

For applications it is convenient to state the following result.

**Theorem 1.** *The set of equations*

$$(m+1) x_m = \sum_{2j \leq m} \binom{m+1}{2j+1} 2^{-2j} y_{m-2j} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (20)$$

is equivalent to the set

$$y_m = \sum_{2j \leq m} \binom{m}{2j} 2^{-2j} D_{2j} x_{m-2j} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (21)$$

Separating even and odd values of  $m$  we have

**Theorem 2.** *The set of equations*

$$(2m+1) x_m = \sum_{j=0}^m \binom{2m+1}{2j} 2^{2j-2m} y_j \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (22)$$

is equivalent to the set

$$y_m = \sum_{j=0}^m \binom{2m}{2j} 2^{2j-2m} D_{2m-2j} x_j \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (23)$$

The set of equations

$$(2m+2) x_m = \sum_{j=0}^m \binom{2m+2}{2j+1} 2^{2j-2m} y_j \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (24)$$

is equivalent to the set

$$y_m = \sum_{j=0}^m \binom{2m+1}{2j+1} 2^{2j-2m} D_{2m-2j} x_j \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (25)$$

L. Carlitz, Duke University, USA

#### REFERENCES

- [1] P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie*, Vol. 2, Teubner, Leipzig, 1910.  
 [2] N. E. NÖRLUND, *Vorlesungen über Differenzrechnung*, Springer, Berlin, 1924.