

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1974)
Heft: 4

Artikel: Der "gefährliche" Ort beim räumlichen Rückwärtseinschnitt
Autor: Baier, O. / Vinzenz, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-29898>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 29

Heft 4

Seiten 81–104

10. Juli 1974

Der «gefährliche» Ort beim räumlichen Rückwärtseinschnitt

1. Beim räumlichen Rückwärtseinschnitt handelt es sich um die Aufgabe, durch ein Dreieck $A_1 A_2 A_3$ ein Dreikant mit gegebenen Winkeln (Spitze S) zu legen. Die Strecke $A_i A_j$ erscheint in einer Ebene stets unter demselben Winkel, wenn sie aus den Punkten zweier zu $A_i A_j$ symmetrischer, kongruenter Kreisbögen (Endpunkte A_i und A_j) beobachtet wird (Peripheriewinkelsatz). Im Raum tritt an die Stelle der beiden Kreisbögen die Torusfläche, die durch Rotation dieser Bögen um die Achse $A_i A_j$ entsteht. Als mögliche Lagen der Dreikantspitze S ergeben sich somit die gemeinsamen Punkte der den Dreikantwinkeln zugeordneten Torusflächen. In einem solchen Punkt treffen sich die drei Schnittkurven je zweier Torusflächen¹⁾. Man nennt ihn «gefährlichen» Punkt, wenn die drei Schnittkurven sich im gemeinsamen Punkt *berühren*, d.h. dieselbe Tangente haben. S. Finsterwalder [1] bewies den Satz: *Die gefährlichen Punkte sind gerade die Punkte des über dem Umkreis des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ errichteten Drehzylinders*. Dieser Satz ist im Lauf der Zeit mehrfach abgeleitet worden [2], [3], [4]. Die Verfasser waren bestrebt, den Beweisgang mit möglichst elementaren Hilfsmitteln zu vereinfachen und fanden dabei interessante und schöne Zusammenhänge. Der räumliche Rückwärtseinschnitt spielt in der Satellitengeodäsie eine wichtige Rolle: Die Lage der Stationen A_1, A_2, A_3 sei bekannt. Wird von ihnen aus ein Satellit S gleichzeitig gegen den Fixsternhimmel photographiert, so lassen sich aus je zwei dieser Aufnahmen die Winkel $A_i S A_j$ ermitteln und durch den Rückwärtseinschnitt der Ort von S im Raum zu diesem Zeitpunkt. Gleichzeitige Aufnahme von S aus einer Station A_4 ergibt die Lage des Strahles $S A_4$ im Bündel S . Jeweils gleichzeitige Aufnahmen der Bahn von S aus weiteren Stationen ergeben somit deren räumliche Lage in bezug auf A_1, A_2, A_3 ²⁾. Die folgenden Überlegungen³⁾ wollen eine Verbindung herstellen zwischen dem Satz von Finsterwalder und allgemeinen Sätzen der Raumgeometrie.

2. Die Tangente im Punkt S einer Schnittkurve zweier Flächen steht auf den in S errichteten Flächennormalen senkrecht. In einem gefährlichen Punkt S stehen

¹⁾ Die Aufgabe des räumlichen Rückwärtseinschnitts behandelt schon G. MONGE (*Géométrie descriptive*, S. 124 ff., Paris 1811 [Ostwald's Klassiker Nr. 117, herausgegeben von R. HAUSSNER, S. 135 ff.], Leipzig 1900).

²⁾ Vgl. hierzu z. B. H. DEKER, *Die Anwendung der Photogrammetrie in der Satellitengeodäsie*, Veröffentlichungen der Bayer. Akad. d. Wiss., Reihe C Nr. 111 (München 1967).

³⁾ Vom erstgenannten Verfasser stammen die Beweise 5 und 7 b. Den Beweis 5 hat er – mit geringen Änderungen – in seinen Vorlesungen über Konstruktive Geometrie (für Mathematiker und Geodäten) an der TU München als Anwendung der stereographischen Projektion vorgetragen.

demnach die *drei* Torusnormalen auf der Schnittkurventangente senkrecht, d.h. *sie liegen in einer Ebene*. Die Torusnormalen sind Durchmesser der Umkreise der Seitendreiecke $SA_i A_j$ des Tetraeders $SA_1 A_2 A_3$. Der der Spitze S im Dreieck $SA_i A_j$ gegenüberliegende Durchmesserendpunkt sei mit B_k bezeichnet. Dann gilt offenbar:

S ist gefährlicher Punkt $\Leftrightarrow S$ liegt in der Ebene $B_1 B_2 B_3$, $S \in B_1 B_2 B_3$.

Auch die Bedingung « S liegt auf dem gefährlichen Zylinder» entspricht einer Inzidenz (S^* sei der Gegenpunkt von S auf der Umkugel von $SA_1 A_2 A_3$):

$$S^* \in A_1 A_2 A_3.$$

In der Tat liegt S^* genau dann auf dem Umkreis von Dreieck $A_1 A_2 A_3$ (und damit in der Ebene $A_1 A_2 A_3$), wenn sich der Gegenpunkt S senkrecht über dem Umkreis, also auf dem gefährlichen Zylinder befindet. Damit lautet der Satz von Finsterwalder:

$$S \in B_1 B_2 B_3 \Leftrightarrow S^* \in A_1 A_2 A_3. \quad (F)$$

3. Die beiden Tetraeder $SA_1 A_2 A_3$ und $S^* B_1 B_2 B_3$ kann man noch in anderer Weise kennzeichnen. Durch die Punkte A_i werden die Lotebenen zu SA_i gelegt. Sie sind die Ebenen eines zu dem Dreikant $SA_1 A_2 A_3$ «polaren» Dreikants. Ihre Schnittgeraden treffen die Seitenflächen $SA_i A_j$ senkrecht in den Umkreispunkten B_k . Ihr gemeinsamer Punkt ist S^* . Der Mittelpunkt M der Umkugel von $SA_1 A_2 A_3$ liegt auf dem Lot zur Ebene $SA_i A_j$ im Mittelpunkt M_k von SB_k . M_k ist Umkreismittelpunkt von $SA_i A_j$ ⁴⁾. S^* bildet also mit S einen Durchmesser der beiden Tetraedern $SA_1 A_2 A_3$ und $S^* B_1 B_2 B_3$ gemeinsamen Umkugel. Der Umkreis von $SA_i A_j$ schneidet den Grosskreis $SB_k S^*$ senkrecht, weil SB_k Umkreisdurchmesser ist.

Aufgrund der Konstruktion erfüllen die Ecken der beiden Tetraeder die sechs Lagebeziehungen

$$B_i \in SA_j A_k, \quad A_i \in S^* B_j B_k. \quad (J)$$

(B_i liegt auf dem Umkreis von $SA_j A_k$. Die Ebene $S^* B_j B_k$ steht in A_i auf SA_i senkrecht.)

Die acht Inzidenzen (F) und (J) besagen: Die Ecken eines jeden der beiden Tetraeder liegen in den Ebenen des anderen. Für solche Tetraeder hat A. F. Möbius [5], [6] bewiesen, *dass aus irgend sieben dieser Inzidenzen die achte folgt*, wie es der Satz (F) von Finsterwalder behauptet.

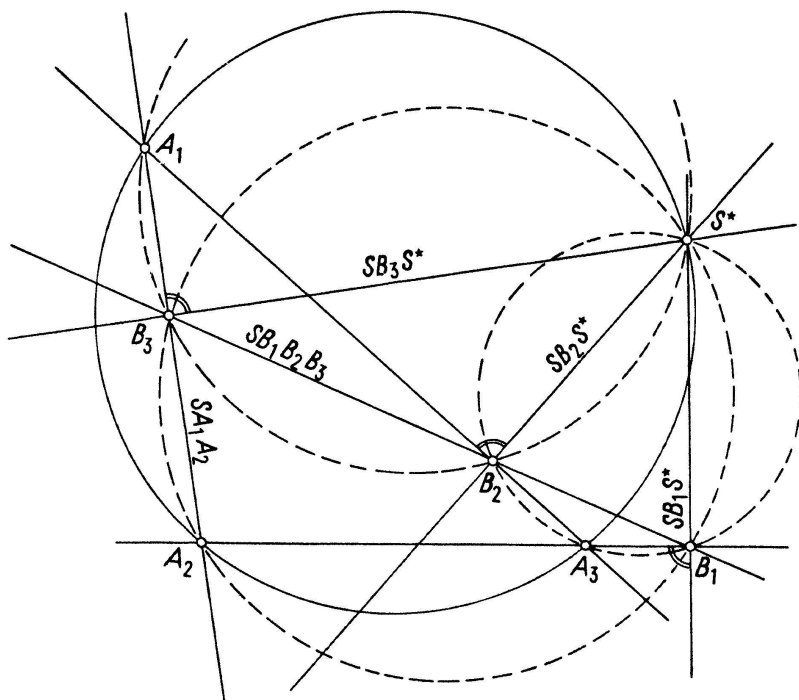
4. Die acht Umkreise der Tetraederdreiecke $SA_i A_j$, $A_1 A_2 A_3$, $S^* B_i B_j$, $B_1 B_2 B_3$ enthalten je vier Ecken, durch jede Ecke gehen vier Umkreise. Die Inzidenzen (J) und (F) sind zu lesen: B_i liegt auf dem Umkreis von $SA_j A_k$ usw. Die durch diese Lagebeziehungen beschriebene Kreisanordnung entspricht einem nach Clifford [7] benannten Satz: Vier Kreise (einer Kugel oder Möbius-Ebene) durch einen Punkt S schneiden sich in sechs Punkten A_i und B_i , wobei S auf den Kreisen $B_i A_j A_k$ und $B_1 B_2 B_3$ liegt. Dann laufen auch die vier Kreise $A_i B_j B_k$ und $A_1 A_2 A_3$ durch einen Punkt S^* .

$$B_i \in SA_j A_k, \quad S \in B_1 B_2 B_3 \Leftrightarrow A_i \in S^* B_j B_k, \quad S^* \in A_1 A_2 A_3.$$

⁴⁾ Einfache Konstruktion von M_k : Schnitt der Lote auf SA_i in A_i und auf SA_j in A_j ist B_k . $\overline{SM_k} = 1/2 \overline{SB_k}$.

Die gesuchte Inzidenz $S^* \in A_1 A_2 A_3$ erhalten wir nach Möbius aus sieben, nach Clifford aus vier Inzidenzen: eine Folge der gemeinsamen Umkugel.

5. Durch eine Inversion projizieren wir die Umkreise der Tetraeder $SA_1 A_2 A_3$ und $S^* B_1 B_2 B_3$ so in eine Möbius-Ebene, dass S auf den Fernpunkt, alle Kreise durch S als Geraden abgebildet werden⁵⁾ (Figur). In die Cliffordsche Kreiskonfiguration sind die Bilder der drei Grosskreise $SB_i S^*$ eingezeichnet. Sie erscheinen als Gerade, die nach der Bemerkung in Abschnitt 3 auf den Bildgeraden der Kreise $SA_j A_k$ senkrecht stehen. Nach dem Satz von Simson-Wallace liegen die Fusspunkte B_i der Lote $SB_i S^*$ auf die Geraden $A_j A_k$ genau dann auf einer Geraden (d.h. $S \in B_1 B_2 B_3!$), wenn S^* auf dem Umkreis von $A_1 A_2 A_3$ liegt. Um $S^* \in A_1 A_2 A_3$ zu zeigen, braucht man sich also nicht auf den Satz von Clifford berufen. Es genügt der elementar beweisbare Satz von Wallace.



6. Wenn S auf dem gefährlichen Zylinder liegt, sind die Fusspunkte der durch S gehenden Höhen der Seitendreiecke $SA_i A_j$ kollinear (Wallace-Gerade von S' im Dreieck $A_1 A_2 A_3$, S' senkrechte Projektion von S auf $A_1 A_2 A_3$), d.h. die Höhen liegen in einer Ebene. Der Satz von Finsterwalder kann daher auch so formuliert werden:

Wenn im Tetraeder $SA_1 A_2 A_3$ die Umkreisdurchmesser SB_k der Seitendreiecke $SA_i A_j$ in einer Ebene liegen, dann sind auch die durch S (H) laufenden Höhen der Seitendreiecke komplanar, und umgekehrt.

Wenn $S \in B_1 B_2 B_3$ gilt, dann liegt der Gegenpunkt S^* von S senkrecht über dem Umkreis von $B_1 B_2 B_3$. Die Höhen durch S^* der Dreiecke $S^* B_i B_j$ sind folglich komplanar. Da $S^* A_k$ Umkreisdurchmesser im Dreieck $S^* B_i B_j$ ist (Polarkant!), sind bezüglich der Tetraeder $SA_1 A_2 A_3$ und $S^* B_1 B_2 B_3$ Behauptung und Voraussetzung von (H) gerade vertauscht. S und S^* sind immer gleichzeitig gefährliche Punkte.

7. Durch eine einfache Rechnung schliesst H. Stachel [4] durch Anwendung des Satzes von Menelaos aus $S \in B_1 B_2 B_3$ auf die Kollinearität der Höhenfusspunkte der

⁵⁾ Stereographische Projektion der Umkugel aus S in deren Berührebene in S^* .

Höhen der Dreiecke SA_iA_j . Statt durch Rechnung kann man den Beweis wie folgt erbringen:

a) Man fasst nicht das Dreieck $A_1A_2A_3$, sondern die Ecke S des Dreikants $SA_1A_2A_3$ ins Auge. Es repräsentiert ein sphärisches Dreieck $C_1C_2C_3$ auf einer Kugel mit Mittelpunkt S . (Die Ecke C_i liege auf der Geraden SA_i .) Auf der Kugel lautet der Satz von Menelaos: Die drei Punkte D_i der Grosskreise durch C_jC_k liegen genau dann auf einem Grosskreis, d.h. in einer Ebene durch S , wenn gilt

$$\frac{\sin C_2D_1}{\sin C_3D_1} \cdot \frac{\sin C_3D_2}{\sin C_1D_2} \cdot \frac{\sin C_1D_3}{\sin C_2D_3} = 1. \quad (M)$$

Also

$$(M) \Leftrightarrow S \in D_1D_2D_3.$$

Spiegelt man D_i am sphärischen Mittellot von C_jC_k , dann gehen für die Bildpunkte E_i die Faktoren in ihre Kehrwerte über ($\sphericalangle D_iSC_j = -\sphericalangle E_iSC_k$), so dass das Produkt den Wert 1 behält. Die Bildpunkte E_i liegen also ebenfalls in einer Ebene durch S : $S \in E_1E_2E_3$. Nun ist in jedem Dreieck ABC $\sphericalangle(a, d_c) = -\sphericalangle(b, h_c)$, wobei d_c den Umkreisdurchmesser mit Endpunkt C , h_c die Höhe auf AB bezeichnet. Also ist auch in den Seitendreiecken SA_iA_j $\sphericalangle A_jSB_k = -\sphericalangle A_iSh(A_iA_j)$ und mit (M) folgt aus $S \in B_1B_2B_3$, dass die Höhen $h(A_iA_j)$ in einer Ebene liegen und umgekehrt. Mithin gilt der Satz von Finsterwalder in der zuletzt gegebenen Formulierung (H).

b) Im Dreieck SA_iA_j sei $B'_k = SB_k \cap A_iA_j$, H_k der Fusspunkt der Höhe durch S , W_k der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden in S mit A_iA_j . Dann gilt wegen der Winkelbeziehung (s.o. 7a) für die Doppelverhältnisse

$$(A_iA_jB'_kW_k) = (A_jA_iH_kW_k)$$

und für die Teilverhältnisse

$$(A_iA_jB'_k) = (A_jA_iH_k) (A_iA_jW_k)^2 = (A_jA_iH_k) \cdot (a_i:a_j)^2, SA_i = a_i, i = 1, 2, 3.$$

Nach Voraussetzung $S \in B_1B_2B_3$ sind B'_1, B'_2, B'_3 kollinear. Der Satz von Menelaos ergibt

$$1 = (A_1A_2B'_3) (A_2A_3B'_1) (A_3A_1B'_2) = (A_2A_1H_3) (A_3A_2H_1) (A_1A_3H_2).$$

Damit sind auch H_1, H_2, H_3 kollinear und umgekehrt.

O. Baier und W. Vinzenz, München

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. FINSTERWALDER, *Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie*, Jb. dtsh. Math. Ver. 6, 1–44 (1899).
- [2] W. WUNDERLICH, *Über den «gefährlichen» Rückwärtseinschnitt*, Jber. dtsh. Math. Ver. 53, 41–48 (1943).
- [3] J. KRAMES, *Elementargeometrischer Nachweis des «gefährlichen» Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt*, El. Math. 10, 106–108 (1955).
- [4] H. STACHEL, *Elementare Bestimmung der gefährlichen Fläche beim räumlichen Rückwärtseinschnitt*, El. Math. 19, 34–37 (1964).
- [5] A. F. MÖBIUS, *Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heißen?* Crelle's Journal Bd. 3, 273–278 (1828); Gesammelte Werke 1. Bd., 439–446 (Leipzig 1885).
- [6] W. BLASCHKE, *Projektive Geometrie*, 3. Aufl., S. 165–184 (Basel 1954).
- [7] H. S. M. COXETER, *Unvergängliche Geometrie*, 318 (Basel 1963).