

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1974)
Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

for $k = 3$ and $m = 2, 3$. In this note we evaluate G where k and m are arbitrary positive integers. The derivation is quite simple once we observe that

$$\begin{aligned} \{\min(n_1, \dots, n_k)\}^m &= \sum_{j=0}^{\min(n_1, \dots, n_k)} j^m - \sum_{j=0}^{\min(n_1, \dots, n_k)-1} j^m \\ &= \sum_{j+i_1=n_1, \dots, j+i_k=n_k} j^m - \sum_{j+i_1+1=n_1, \dots, j+i_k+1=n_k} j^m. \end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned} G &= \sum_{n_1, \dots, n_k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j+i_1=n_1, \dots, j+i_k=n_k} j^m x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} - \sum_{j+i_1+1=n_1, \dots, j+i_k+1=n_k} j^m x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} \right\} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k, j=0}^{\infty} j^m x_1^{j+i_1} \dots x_k^{j+i_k} - \sum_{i_1, \dots, i_k, j=0}^{\infty} j^m x_1^{j+i_1+1} \dots x_k^{j+i_k+1} \\ &= (1 - x_1 x_2 \dots x_k) (1 - x_1)^{-1} \dots (1 - x_k)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} j^m (x_1 x_2 \dots x_k)^j \\ &= \frac{a_m(x_1 x_2 \dots x_k)}{(1 - x_1) \dots (1 - x_k) (1 - x_1 x_2 \dots x_k)^m} \end{aligned}$$

where $a_m(y)$ is the m^{th} Eulerian polynomial (see [2] p. 38).

R. C. Grimson, Elon College, N. C., USA

REFERENCES

- [1] L. CARLITZ, *The Generating Function for $\max(n_1, \dots, n_k)$* , Portugal. math. 27, 201–207 (1962).
- [2] J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, New York, 1958.

Aufgaben

Aufgabe 693. Es seien A ein offenes Intervall der reellen Zahlengeraden und f, g zwei auf A definierte differenzierbare reellwertige Funktionen mit $f(x) \neq \pm 1$, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ für alle x in A . Man zeige, dass die durch

$$F(x) = |f(x)| \log |g(x)| \quad [x \in A]$$

definierte Funktion F differenzierbar ist und bestimme die erste Ableitung von F .

R. Rose, Biel

Lösung: Es ist

$$F(x) = \frac{\ln |g(x)|}{\ln |f(x)|} \quad [x \in A].$$

Hier sind nach Voraussetzung und der Kettenregel Zähler- und Nennerfunktion für alle $x \in A$ differenzierbar, und es gilt z.B.

$$(\ln |g(x)|)' = \begin{cases} (\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} & \text{wenn } g(x) > 0 \\ (\ln (-g(x)))' = \frac{-g'(x)}{-g(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)} & \text{wenn } g(x) < 0. \end{cases}$$

Da im betrachteten Intervall $\ln |f(x)| \neq 0$, $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, so existiert nach der Quotientenregel auch $F'(x)$ und ist gleich

$$\frac{f(x) g'(x) \ln |f(x)| - f'(x) g(x) \ln |g(x)|}{f(x) g(x) (\ln |f(x)|)^2}$$

H. Kappus, Rodersdorf SO

Weitere Lösungen sandten J. Binz (Bolligen BE), M. Majić (Stuttgart, BRD) und I. Paasche (München, BRD; zwei Lösungen).

Aufgabe 694. Trifft man entgegen der üblichen Festsetzung $\binom{0}{0} = 1$ die Konvention $\binom{0}{0}/0 = 0$, so gilt für alle nichtnegativen ganzen Zahlen N die Darstellung

$$N = \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^n n^N \sum_{m=n-1}^N \binom{m}{n-1}/m.$$

I. Paasche, München

Lösung: Die in der Aufgabe vorkommende Summe über n werde mit $f(N)$ bezeichnet. Offensichtlich gilt $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Für $n \geq 2$ ist

$$\binom{m}{n-1}/m = \binom{m-1}{n-2}/(n-1)$$

und damit

$$\sum_{m=n-1}^N \binom{m}{n-1}/m = \binom{N}{n-1}/(n-1).$$

Daraus erhalten wir

$$f(N) = - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N+1} (-1)^n \frac{n^N}{n-1} \binom{N}{n-1}.$$

Berechnen wir jetzt

$$f(N+1) - f(N) = - \frac{1}{N+1} + \sum_{n=2}^{N+2} (-1)^n \frac{n^N}{n-1} \left[n \binom{N+1}{n-1} - \binom{N}{n-1} \right].$$

Eine kurze Umrechnung gibt den Summanden die Form

$$(-1)^n \frac{n^{N+1}}{N+1} \binom{N+2}{n}.$$

Somit wird

$$\begin{aligned} f(N+1) - f(N) &= - \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1} \sum_{n=2}^{N+2} (-1)^n n^{N+1} \binom{N+2}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{N+1} \sum_{n=1}^{N+2} (-1)^n n^{N+1} \binom{N+2}{n} = 1; \end{aligned}$$

die letzte Summe lässt sich nämlich als Anzahl der Surjektionen einer $(N+1)$ -elementigen Menge auf eine $(N+2)$ -elementige Menge deuten und verschwindet daher. Zusammen mit $f(0) = 0$ folgt $f(N) = N$ für alle N . J. Binz, Bolligen

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig, BRD) und L. Carlitz (Durham, N. C., USA).

Aufgabe 695. Ein Dreieck habe die Seitenlängen a, b, c mit $0 < a \leq b \leq c$. Man bestimme sämtliche Paare von Punkten P, Q auf dem Rand des Dreiecks derart, dass die Strecke PQ das Dreieck in zwei Polygone mit gleichem Umfang und gleichem Flächeninhalt zerlegt. Wie hängt die Anzahl dieser Punktpaare von a, b, c ab?

H. R. Suter, Muri bei Bern

Lösung: Die Strecke PQ schneidet vom gegebenen Dreieck ABC entweder an der Ecke C (1. Fall), an der Ecke B (2. Fall) oder an der Ecke A (3. Fall) ein Teildreieck ab. Das Restpolygon ist im allgemeinen ein Viereck; nur dann wenn PQ eine Symmetrale des Dreiecks ABC ist, wird dieses in zwei Teildreiecke zerlegt. Um zu vermeiden, dass eine solche Lösung doppelt gezählt wird, soll eine durch A gehende Teilungsstrecke nur beim 2. Fall, hingegen eine durch B oder C gehende Teilungsstrecke nur beim 3. Fall als Lösung gezählt werden.

1. *Fall.* Trennt die den Umfang und die Fläche des Dreiecks halbierende Strecke PQ an der Ecke C ein Teildreieck ab, so ist $CP + CQ = (1/2)(a + b + c)$ und $CP \cdot CQ = (1/2)ab$. CP und CQ sind daher die Wurzeln der Gleichung $z^2 - (1/2)(a + b + c) \cdot z + (1/2)ab = 0$.

Es soll $CP = 1/4(a + b + c + \sqrt{(a + b + c)^2 - 8ab})$ sein, so dass stets $CP \geq CQ$. Da P entweder auf der Seite a oder b liegen kann, gibt es zwei Strecken PQ , die aber nur dann als Lösungen brauchbar sind, wenn die Punkte P und Q reell sind und keiner von beiden auf der Verlängerung einer Dreiecksseite liegt. Wegen $c \geq b$ ist $(a + b + c)^2 - 8ab \geq (a + 2b)^2 - 8ab = (2b - a)^2 > 0$.

P und Q sind somit reelle Punkte. Ferner ist $CP \geq (1/4)(a + 2b + 2b - a) = b$, also $CP \geq b \geq a$. Eine brauchbare Lösung existiert somit, wenn man obige Vereinbarung beachtet, nicht.

2. *Fall.* Wenn PQ mit der Ecke B ein Teildreieck bildet, ist $BP = (1/4)(a + b + c + \sqrt{(a + b + c)^2 - 8ac})$, und wegen $b \geq a$ ist $(a + b + c)^2 - 8ac \geq (a + b + c)^2 - 4ac - 4bc = (a + b - c)^2 > 0$.

P und Q sind demnach reelle Punkte, wobei $BP \geq BQ$. Wegen $a + b > c$ ist ferner $BP \geq (1/4)(a + b + c + a + b - c) = (1/2)(a + b)$. Es ist daher einerseits $BP \geq a$ und wegen $a + b > c$ andererseits $BP > c/2$.

Aus $BP \cdot BQ = (1/2)ac$ folgt dann $BQ < a$. Weiter ist $(a + b + c)^2 - 8ac \leq (a + 2c)^2 - 8ac = (2c - a)^2$ und $BP \leq (1/4)(a + 2c + 2c - a) = c$. Es kann demnach P nur auf c und Q nur auf a liegen. Es gibt daher genau eine brauchbare Lösung PQ , die an der Ecke B ein Teildreieck abschneidet.

3. *Fall.* Schneidet PQ an der Ecke A ein Teildreieck ab, so ist $AP = (1/4)(a + b + c + \sqrt{(a + b + c)^2 - 8bc})$. Das Beispiel $a = b - 1$ und $c = b + 1$ zeigt, dass $(a + b + c)^2 - 8bc = b(b - 8)$ positiv, null oder negativ sein kann, je nachdem $b \gtrless 8$ ist [vgl. auch Aufgabe 696, (1)]. Ist $(a + b + c)^2 < 8bc$, so gibt es keine reelle Lösung. Für $(a + b + c)^2 = 8bc$ ist $AP = AQ = (1/4)(a + b + c)$, und man erhält genau eine brauchbare Lösung, da wegen $a \leq b$ und $c < 2b$ $AP = AQ < b$ ist. Aus $(a + b + c)^2 > 8bc$ folgt $(a + b + c)^2 - 8bc \leq (2b + c)^2 - 8bc = (2b - c)^2$ und $AP \leq (1/4)(2b + c + 2b - c) = b$, und man erhält wegen $AQ < AP \leq b$ zwei brauchbare Lösungen.

Zusammenfassend erhält man die Lösungszahlen 3, 2 oder 1, je nachdem ob $(a + b + c)^2 \geq 8bc$ ist.

K. Grün, Linz (Donau), Österreich

Weitere Lösungen sandten K. Grün (Linz; 2. Lösung) und I. Paasche (München, BRD).

Aufgabe 696. Für die Seitenlängen a, b, c eines Dreiecks sei $0 < a \leq b \leq c$. Man zeige, dass

$$4 < \frac{(a + b + c)^2}{bc} \leq 9, \quad (1)$$

$$8 < \frac{(a + b + c)^2}{ac} < \infty, \quad (2)$$

$$9 \leq \frac{(a + b + c)^2}{ab} < \infty \quad (3)$$

gelten, dass die angegebenen Schranken die bestmöglichen sind, dass die Quotienten jeden Zwischenwert annehmen können und dass in (1) und (3) das Gleichheitszeichen genau für das gleichseitige Dreieck steht.

J. Rätz, Bern

Lösung: Setzt man $a/c = x$, $b/c = y$, so sind die drei Funktionen

$$f_1(x, y) = \frac{(x + y + 1)^2}{y}, \quad f_2(x, y) = \frac{(x + y + 1)^2}{x}, \quad f_3(x, y) = \frac{(x + y + 1)^2}{xy}$$

im Bereich B , der auf Grund der Voraussetzung $a \leq b \leq c$ und der Dreiecksungleichung $c < a + b$ durch die Ungleichungen $0 < x \leq y \leq 1$, $1 < x + y$ charakterisiert wird, nach unten und oben abzuschätzen. B wird von den Geraden $g_1: y = 1 - x$, $g_2: y = x$ und $g_3: y = 1$ begrenzt, dabei gehören die Punkte der Geraden g_1 für $0 \leq x \leq 1/2$ nicht zu B , die Punkte von g_2 und g_3 gehören (bis auf die mit g_1 gemeinsamen Punkte) alle zu B .

Für alle $(x, y) \in B$ sind die f_v stetig und differenzierbar:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2 \frac{x + y + 1}{y} > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 2 \frac{x + y + 1}{x} > 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = -\frac{(x + y + 1)(y + 1 - x)}{x^2 y} < 0.$$

Folglich gilt: Für festes y nimmt f_1 (f_3) die kleinsten (grössten) Werte auf g_1 , die grössten (kleinsten) Werte auf g_2 an.

Für festes x nimmt f_2 die kleinsten Werte auf g_1 und g_2 an, die grössten auf g_3 .

Damit folgt im einzelnen:

$$4 \leq \frac{4}{y} = f_1(1 - y, y) \leq f_1(x, y) \leq f_1(y, y) = \frac{(2y + 1)^2}{y} \leq 9.$$

Da die Punkte von g_1 nicht zu B gehören, gilt für alle $(x, y) \in B$:

$$4 < f_1(x, y) \leq 9,$$

und das Gleichheitszeichen wird nur im Punkte $x = y = 1$ angenommen.

Für f_2 gilt auf g_1 :

$$\frac{4}{x} = f_2(x, 1 - x) \leq f_2(x, y);$$

auf g_2 :

$$\frac{(2x + 1)^2}{x} = f_2(x, x) \leq f_2(x, y).$$

Beide Grenzfunktionen nehmen ihren kleinsten Wert 8 für $x = 1/2$ an, ausserdem gilt $\lim_{x \rightarrow 0+} f_2(x, 1) = \infty$. Da $g_1 \cap B = \emptyset$, gilt für alle $(x, y) \in B$: $8 < f_2(x, y) < \infty$.

Schliesslich ist

$$9 \leq \frac{(2y+1)^2}{y^2} = f_3(y, y) \leq f_3(x, y)$$

und $\lim_{y \rightarrow 0+} f_3(x, 1) = \infty$. Somit gilt für alle $(x, y) \in B$ $9 \leq f_3(x, y) < \infty$, und das Gleichheitszeichen wird nur für $x = y = 1$ angenommen. Da die f_n auf der zusammenhängenden Punktmenge B stetig sind, wird jeder Zwischenwert angenommen.

G. Bach, Braunschweig, BRD

Weitere Lösungen sandten L. Bankoff (Los Angeles, California, USA), G. Bercea (München, BRD), J. Binz (Bolligen BE), H. Brändli (Zürich), E. Braune (Linz, Österreich; Teillösung), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodorsdorf SO), M. S. Klamkin (Ann Arbor, Michigan, USA), P. Nüesch (Lausanne) und I. Paasche (München, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Dezember 1974**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 717. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Man beweise: Die Schar aller jener Kreise, deren Mittelpunkte P auf einer Sehne s von k liegen und deren Radien durch die Potenzstrecke von P bezüglich

$$k \quad (= \sqrt{r^2 - MP^2} \geq 0)$$

gegeben sind, wird von einer Ellipse eingehüllt. W. Kienberger, Graz, Österreich

Aufgabe 718. Gegeben ist ein ebenes Dreieck ABC mit Umfang $a + b + c = 2s$, Inkreisradius r und Umkreisradius R . Man zeige: Sind X, Y, Z die drei Inkreisberührungspunkte oder die drei inneren Ankreisberührungspunkte auf den Seiten der Längen a, b, c von ABC , so gilt beide Male

$$S \equiv AX^2 + BY^2 + CZ^2 = \frac{us^2 - vr(4R + r)}{R},$$

worin u und v von der Gestalt $tR \pm r$ mit $t \in \{1, 2, 3, 4\}$ sind.

I. Paasche, München, BRD

Aufgabe 719. Es sei p_r die r -te Primzahl ($p_1 = 2, p_2 = 3$). Dann gibt es für $r > 2$ mindestens eine Primzahl q mit

$$p_r < q < \prod_{k=1}^r p_k - 1.$$

E. Härtter, Mainz, BRD

Aufgabe 720. Es sei $f(n)$ die kleinste Zahl, für welche für alle $x \geq 1$ gilt:

$$\pi(x) \leq \frac{1}{n} (x + f(n)).$$

Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen k gilt:

$$f(n) = \frac{e^n}{n-1} + o\left(\frac{e^n}{n^k}\right).$$

P. Erdős, Budapest, und J. L. Selfridge, DeKalb, Illinois, USA

Literaturüberschau

Foundations of Potential Theory. Von O. D. KELLOGG. X, 383 Seiten. 30 Figuren. DM 32,—. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 31. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1967.

Der vorliegende Band ist ein unveränderter Nachdruck der schon 1929 erschienenen ersten Ausgabe dieser inzwischen zu einem Standardwerk gewordenen Einführung in die Potentialtheorie. Zwar ist die Entwicklung auch in diesem Gebiet der angewandten Mathematik nicht stehen geblieben. Dank starker Impulse, ausgehend von der Theorie der stochastischen Prozesse, erlebt die Potentialtheorie zur Zeit eine neue Blüte. Trotzdem ist dieses Werk immer noch eine ausgezeichnete Hilfe für jeden, der die Grundlagen dieser Theorie und ihre hauptsächlichsten Anwendungen kennenlernen will. Das Buch zeichnet sich durch eine klare und modern anmutende Terminologie aus. Sämtliche Sätze und Verfahren werden für den zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum hergeleitet und sind anhand einer grossen Zahl von physikalischen Beispielen illustriert. Gerade deshalb kann dieser Leitfaden vor allem dem Naturwissenschaftler und Geodäten bestens empfohlen werden.

W. MAURER

Foundations of Probability. Von ALFRED RÉNYI. XIII, 366 Seiten. \$20.—. Holden Day, San Francisco 1970.

Mit diesem Buch wollte der 1970 verstorbene A. Rényi ein Werk vorlegen, das fortgeschrittenen Studenten der Mathematik und Mathematikern, die sich bisher noch nicht damit beschäftigt haben, einen Einstieg in das Gebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie als Feld der Forschung ermöglicht. Als Voraussetzungen für ein Studium dieses Buches werden daher Kenntnisse der reellen Analysis und Masstheorie erwartet.

Das Buch war zunächst als englischsprachige Überarbeitung des in ungarischer und deutscher Sprache erschienenen Werkes «Wahrscheinlichkeitsrechnung mit einem Anhang über Informationstheorie» geplant. Es wurde aber ein gänzlich neues Buch, das auch gegenüber anderen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung wesentliche Merkmalsunterschiede aufweist. Die Wahrscheinlichkeitstheorie wird grundsätzlich für bedingte Wahrscheinlichkeitsräume formuliert, wovon die gewöhnlichen als Spezialfall auftreten. Die Unabhängigkeit wird in zwei Stufen diskutiert und zunächst der qualitative Unabhängigkeitsbegriff von Marczewski behandelt. Dabei wird auch der Begriff der Information als wesentlicher wahrscheinlichkeitstheoretischer Begriff vorgestellt. Die klassischen Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie, inklusive des Gesetzes vom iterierten Logarithmus, werden von einem neuen Standpunkt aus betrachtet und auf ungewöhnliche Art und Weise bewiesen. Doch wird auch der ursprüngliche Beweis von Bernoulli für das starke Gesetz der grossen Zahl vorgestellt, allerdings unter Einschränkung der möglichen Allgemeinheit. Obwohl Rényi sich auf die Diskussion von abzählbar vielen Zufallsvariablen beschränkt, die allgemeine Theorie der stochastischen Prozesse also weglässt, werden der Wiener- und Poissonprozess ausgehend von einer Folge unabhängiger gleichverteilter Zufallsvariabler behandelt. Grosser Wert wird jeweils auf die effektive Konstruktion der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsräume gelegt.

Die einzelnen Kapitel, an deren Ende man jeweils eine umfangreiche Aufgabensammlung und ein ausführliches Literaturverzeichnis findet, lauten: 1. Experiments; 2. Probability; 3. Independence; 4. The Laws of Chance; 5. Dependence.

Dieses Buch ist als interessante Bereicherung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Literatur zu werten.

H. BÜHLMANN