

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1974)
Heft: 3

Artikel: Mittelpunktspolyeder im E4
Autor: Hertel, Eike
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-29895>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

im Intervall $(0, \pi)$ streng konkav ist. Wir unterscheiden nun folgende Möglichkeiten:

2a. $a = b$ und $63^\circ 1' \leq \alpha < 90^\circ$.

Wir zeigen, dass in diesem Fall $s_C + s_B > 3\pi$ ist, was wie oben einen Widerspruch ergibt. Sei $h(\alpha) = 4a + c \leq s_C + s_B$. $h(\alpha) = 4g(\alpha) + g(2\alpha)$ ist konkav, wir haben daher nur die Randwerte zu überprüfen: $h(90^\circ) = 8r \geq 3\pi$, und $h(63^\circ 1') > 3\pi$ (es genügt klarerweise, dies für $r = 3\pi/8$ nachzurechnen).

2b. $a > b$ und $63^\circ 1' \leq \alpha < 90^\circ$

Wir bewegen A auf dem Umkreis auf B zu, bis $b = a$ ist. Da $\beta > \gamma$, nimmt dabei (wegen der Konkavität von g) $b = g(\beta)$ weniger zu als $c = g(\gamma)$ ab, also wird $b + c$ kleiner, und es folgt nach 2a): $s_B + s_C \geq 3a + b + c > 3\pi$.

2c. $60^\circ \leq \alpha \leq 63^\circ 1'$.

Wenn wir A wie im Fall 2b) bewegen, wird $b + c$ kleiner. Anschliessend bewegen wir A und B mit gleicher Geschwindigkeit zueinander, solange bis $\alpha = \beta = 63^\circ 1'$ ist. Dabei wird $b + c = g(\alpha) + g(2\alpha)$ nochmals kleiner, wie eine einfache Rechnung zeigt. Es folgt:

$$b + c \geq g(63^\circ 1') + g(106^\circ 2') =: v(r). \text{ Nun ist } e \leq \frac{3\pi}{2} - (b + c), f \leq \frac{3\pi}{2} - (a + c)$$

$$\leq \frac{3\pi}{2} - (b + c), d \leq \frac{3\pi}{2} - (a + b) \leq \frac{3\pi}{2} - (b + c), \text{ und daher } d, e \text{ und}$$

$$f \leq \frac{3\pi}{2} - v(r). v(r) \text{ ist monoton wachsend, also folgt wegen } v\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 207,5^\circ:$$

$$d, e \text{ und } f \text{ sind } \leq \frac{3\pi}{2} - v\left(\frac{3\pi}{8}\right) < 62,5^\circ.$$

Der Durchschnitt der drei Kreise mit Radius $r \geq 3\pi/8$ und Mittelpunkten A, B, C besteht nur aus dem Punkt M . Verkleinert man den Radius auf $62,5^\circ$, so wird der Durchschnitt leer. Da d, e und $f < 62,5^\circ$ sind, wäre jedoch D ein Element dieses Durchschnitts. Damit ist der Satz bewiesen.

Johann Linhart, Universität Salzburg

LITERATUR

- [1] ROSTA, VERA, *An Extremal Arrangement of three Great Circles on the Sphere*, Mat. Lapok 24 (1973). (to appear).
 [2] FEJES TÓTH, L., *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1965.

Mittelpunktpolyeder im E^4

1. Es sei \mathbf{P}^4 die Menge der eigentlichen Polyeder (Polytope) des vierdimensionalen euklidischen Raumes E^4 . Mit \mathbf{S}^4 bezeichnen wir die Menge aller konvexen vierdimensionalen Mittelpunktpolyeder im engeren Sinne – das sind zentralsymmetrische Polyeder, deren sämtliche dreidimensionale Seitenflächen ebenfalls zentralsymmetrisch sind [1]. Zwei Polyeder A und B aus \mathbf{P}^4 heissen translativ zerlegungsgleich ($A \sim B$), wenn sie sich in endlich viele paarweise translationsgleiche Teilpolyeder zerlegen lassen. Ist W ein fester vierdimensionaler Würfel der Kantenlänge 1, so bezeichnen

wir mit \mathcal{W}^4 die Menge aller Polyeder A mit $A \sim \lambda W$, wobei λW der aus W durch Dilatation mit $\lambda > 0$ hervorgegangene Würfel ist. Es ist bekannt [1], dass $\mathcal{W}^4 \subset \mathcal{S}^4$ gilt. Durch Übertragung eines Ergebnisses von H. Hadwiger [2] für den E^3 wollen wir zeigen, dass auch die Umkehrung $\mathcal{S}^4 \subset \mathcal{W}^4$ richtig ist. Genauer gilt der folgende

Satz. Ein konvexes vierdimensionales Polyeder ist genau dann mit einem vierdimensionalen Würfel translativ zerlegungsgleich, wenn es ein Mittelpunktspolyeder im engeren Sinne ist ($\mathcal{S}^4 = \mathcal{W}^4$).

2. Wir stellen zunächst einige Begriffe und Hilfsaussagen für den Beweis dieses Satzes zusammen (vgl. [3]).

Hilfssatz 1. Die translative Zerlegungsgleichheit \sim ist eine Äquivalenzrelation über \mathcal{P}^4 .

Hilfssatz 2. Es gilt der folgende Additionssatz

$$A_1 \sim B_1 \text{ und } A_2 \sim B_2 \Rightarrow A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2$$

und der Subtraktionssatz

$$A_1 + A_2 \sim B_1 + B_2 \text{ und } A_1 \sim B_1 \Rightarrow A_2 \sim B_2 .$$

Die elementargeometrischen Additionen $A + B$ von Polyedern sollen stets ausführbar sein, was durch eventuelle Translationen der beteiligten Polyeder immer erreichbar ist.

Ferner betrachten wir folgende Abbildungen F_i von \mathcal{P}^4 in die reellen Zahlen (translationsinvariante und einfach additive Polyederfunktionale – vgl. etwa [4] bzw. [6]).

$$F_4(A) =_{df} V_4(A) ,$$

wobei V_4 das (vierdimensionale) Volumen bedeutet.

$$F_3(A) =_{df} V_3(A; u) - V_3(A; -u) ,$$

wobei $(A; u)$ das System der dreidimensionalen Seitenflächen von A mit dem ins Äussere von A weisenden Normalenvektor u darstellt und $V_3(A; u)$ der (dreidimensionale) Inhalt dieses Systems ist.

$$F_2(A) =_{df} V_2(A; u, v) - V_2(A; u, -v) + V_2(A; -u, -v) - V_2(A; -u, v) ,$$

dabei ist $(A; u, v)$ das System der zweidimensionalen Seitenflächen von $(A; u)$ mit dem ins «Äussere» von $(A; u)$ weisenden Normalenvektor v (orthogonal u) und V_2 der zweidimensionale Inhalt. Entsprechend ist das letzte Funktional zu verstehen:

$$\begin{aligned} F_1(A) =_{df} & V_1(A; u, v, w) - V_1(A; u, v, -w) \\ & + V_1(A; u, -v, -w) - V_1(A; u, -v, w) \\ & + V_1(A; -u, v, -w) - V_1(A; -u, v, w) \\ & + V_1(A; -u, -v, w) - V_1(A; -u, -v, -w) . \end{aligned}$$

Dann gilt der folgende

$$\textit{Hilfssatz 3. } A \sim B \Rightarrow F_i(A) = F_i(B) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Bezüglich der Dilatation ϱA mit rationalem $\varrho > 0$ gilt der

Hilfssatz 4. Die Funktionale F_i sind rational-homogen vom Grade i , d. h.

$$F_i(\varrho A) = \varrho^i F_i(A) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

3. Ein Polyeder A aus P^4 heisst i -stufiger Zylinder, wenn $A = B_1 \times \dots \times B_i$ die i -fache Minkowskische Summe von konvexen Polyedern B_1, \dots, B_i ist, die in Unterräumen E^{k_1}, \dots, E^{k_i} liegen, welche sich paarweise in allgemeiner Lage befinden und für deren Dimensionen k_j gilt: $k_j \geq 1$ und $\sum_1^i k_j = 4$. Die Menge aller Polyeder C , die mit einer endlichen Summe von i -stufigen Zylindern translativ zerlegungsgleich sind, wird als i -te Zylinderklasse Z_i bezeichnet. Für diese Polyeder gilt der folgende

Hilfssatz 5. $C \in Z_j \Rightarrow F_i(C) \equiv 0$ für $i < j$.

(Vgl. [3], S. 55). Dabei soll $F_i(C) \equiv 0$ das identische Verschwinden des Funktionals F_i für alle Seitenflächennormalen u bzw. orthonormierten Richtungszweibeine (u, v) bzw. Richtungsdreibeine (u, v, w) andeuten.

Die entscheidende Rolle in unserem Beweis spielt der

Hilfssatz 6. Ist C aus Z_i und n eine natürliche Zahl, so gibt es ein Polyeder C_0 aus Z_{i+1} mit $nC \sim n^i \circ C + C_0$ (für $i = 4$ ist $C_0 = \emptyset$).

(Vgl. [3], S. 29). Dabei bedeutet $m \circ C$ die ganze Vervielfachung von C in folgendem Sinne:

$$m \circ C = C_1 + \dots + C_m \text{ und } C_i \text{ translationsgleich } C \text{ (} i = 1, \dots, m \text{)}.$$

Bezüglich der Operationen der Dilatation und der ganzen Vervielfachung stellen wir einige Eigenschaften zusammen in dem

$$\begin{aligned} \text{Hilfssatz 7.} \quad & \lambda(A \times B) = \lambda A \times \lambda B, \\ & \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \\ & m \circ (A + B) \sim m \circ A + m \circ B, \\ & A \sim B \Leftrightarrow m \circ A \sim m \circ B. \end{aligned}$$

Schliesslich sind die geraden Prismen Z als spezielle 2stufige Zylinder von besonderem Interesse. Ein gerades Prisma $Z = P' \times h$ wollen wir darstellen durch $Z = (P', h)$, wo P' ein (eigentliches) Polyeder einer dreidimensionalen Hyperebene E^3 und h eine zu E^3 total orthogonale Strecke ist. Dann gilt folgender

$$\text{Hilfssatz 8. } F_i(P', h) = h \cdot F'_{i-1}(P') \quad \text{für } i = 2, 3, 4.$$

(Vgl. auch [4]). Dabei haben wir mit h zugleich die Länge (reelle Zahl) der Strecke h bezeichnet, und F'_i ist ein für die dreidimensionalen Polyeder P' in E^3 analog den F_i zu erklärendes Funktional.

Unsere Beweisvorbereitungen werden abgeschlossen durch den

Hilfssatz 9. Ist $Z = (P', \lambda h)$ ein gerades Prisma und λ eine positive reelle Zahl, so gibt es zwei Polyeder X und Y aus Z_3 mit

$$(P', \lambda h) + X \sim (\lambda P', h) + Y.$$

Diese Aussage ist in einem kürzlich von Jessen formulierten Satz enthalten ([7], S. 51).

4. Nun beweisen wir den eingangs formulierten Satz. Zunächst ist klar, dass jeder Würfel ein Mittelpunktspolyeder im engeren Sinne ist bzw. $W^4 \subset S^4$. Es sei umgekehrt M ein beliebiges konvexes vierdimensionales Mittelpunktspolyeder im engeren Sinne. Dann besitzt M paarweise translationsgleiche Seitenflächen $(M; u)$ und $(M; -u)$ [1], woraus zunächst

$$F_i(M) \equiv 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

folgt. Nun fixieren wir eine Hyperebene $E_{u_0}^3$ mit dem Normalenvektor u_0 so, dass M ganz im Inneren des durch u_0 bestimmten Halbraumes liegt. Die $2n$ Seitenflächen $(M; u_i)$ von M seien so durchnumeriert, dass $u_i u_0 > 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ gilt. Dann lässt sich M darstellen durch

$$\sum_{i=1}^n T_i = M + \sum_{i=1}^n T_{n+i}, \quad (2)$$

wobei T_i eine «Projektionssäule» ist mit dem in $E_{u_0}^3$ liegenden «Grundflächenpolyeder» P_i , welches die orthogonale Projektion des «Deckflächenpolyeders» $(M; u_i)$ darstellt. Bei geeigneter Numerierung (P_i translationsgleich P_{n+i} für $i = 1, \dots, n$) lassen sich unter unseren Voraussetzungen die Differenzen $T_i - T_{n+i} = (P_i, h_i)$ bilden ($i = 1, \dots, n$), so dass (2) übergeht in

$$M \sim \sum_1^n (P_i, h_i).$$

Hilfssatz 7 liefert

$$2M \sim \sum_1^n (2P_i, 2h_i). \quad (3)$$

Hilfssatz 6 übertragen auf den dreidimensionalen Fall ($P_i \subset E_{u_0}^3$), liefert

$$2P_i \sim 2 \circ P_i + Z_i, \quad (4)$$

wo Z_i ein Polyeder aus Z_2' (zweite Zylinderklasse bzgl. $E_{u_0}^3$) ist. Berücksichtigen wir, dass die Zentralsymmetrie von $(M; u_i)$ bei der Orthogonalprojektion auf $E_{u_0}^3$ erhalten bleibt, so erhellt, dass P_i zentralsymmetrisch ist und mithin

$$F_2'(P_i) \equiv 0 \quad (5)$$

gilt. Da auch Hilfssatz 3 sinngemäss für den dreidimensionalen Fall gilt (vgl. [5]), folgt aus (4)

$$F_2'(2P_i) = F_2'(2 \circ P_i) + F_2'(Z_i),$$

mit (5) also $F_2'(Z_i) \equiv 0$. Daraus und aus $Z_i \in Z_2'$ ergibt sich ([5], S. 203) $Z_i \sim W_i'$, wo W_i' ein geeigneter in $E_{u_0}^3$ liegender Würfel ist. (3) und (4) liefern also insgesamt

$$\left. \begin{aligned} 2M &\sim \sum (2 \circ P_i + W_i', 2h_i), \\ 2M &\sim \sum (2 \circ P_i, 2h_i) + \sum (W_i', 2h_i), \\ 2M &\sim 2^2 \circ \sum (P_i, h_i) + \sum (W_i', 2h_i) \text{ bzw.} \\ 2M &\sim 2^2 \circ M + W_1^4 \text{ mit } W_1^4 \in Z_4. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Nach Hilfssatz 9 gilt ferner

$$(P_i, h_i) + X_i \sim (P'_i, h) + Y_i,$$

wo h eine fest gegebene positive reelle Zahl (Strecke) ist, $P'_i = (h_i/h) \cdot P_i$ und $X_i, Y_i \in \mathbf{Z}_3$ gilt. Daraus folgt

$$\sum (P_i, h_i) + \sum X_i \sim \sum (P'_i, h) + \sum Y_i \quad \text{bzw.} \quad M + X \sim (Q, h) + Y. \quad (7)$$

Dabei ist $X, Y \in \mathbf{Z}_3$ und (Q, h) ein gerades Prisma mit der Grundfläche $Q = \Sigma P'_i \subset E_{u_0}^3$. Unter Beachtung von (5) ergibt sich noch $F'_2(P_i) = F'_2(P'_i) \equiv 0$ bzw.

$$F'_2(Q) \equiv 0. \quad (8)$$

Ferner folgt aus (7)

$$F_2(M) + F_2(X) = F_2(Q, h) + F_2(Y)$$

und daraus mit (1) und Hilfssatz 5 $F_2(Q, h) \equiv 0$, nach Hilfssatz 8 also $h \cdot F'_1(Q) \equiv 0$ bzw. $F'_1(Q) \equiv 0$. Zusammen mit (8) schliessen wir daraus wie oben auf die Existenz eines geeigneten Elementes W_2^4 aus \mathbf{Z}_4 mit $(Q, h) \sim W_2^4$. Es gilt also statt (7) sogar

$$M + X \sim W_2^4 + Y. \quad (9)$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von Hilfssatz 6 und 7

$$\left. \begin{aligned} 2M + 2X &\sim 2W_2^4 + 2Y \quad \text{bzw.} \\ 2M + 2^3 \circ X + U_1 &\sim 2^4 \circ W_2^4 + 2^3 \circ Y + U_2 \quad (U_1, U_2 \in \mathbf{Z}_4), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

andererseits folgt aus (9) aber

$$2^3 \circ M + 2^3 \circ X \sim 2^3 \circ W_2^4 + 2^3 \circ Y,$$

so dass sich mit Hilfssatz 1 und 2 aus (10) ergibt:

$$2M + 2^3 \circ X + U_1 + 2^3 \circ W_2^4 + 2^3 \circ Y \sim 2^4 \circ W_2^4 + 2^3 \circ Y + U_2 + 2^3 \circ M + 2^3 \circ X$$

bzw.

$$2M + U_1 \sim 2^3 \circ M + 2^3 \circ W_2^4 + U_2.$$

Da es sicher ein W_3^4 aus \mathbf{Z}_4 gibt mit

$$W_3^4 + U_1 \sim 2^3 \circ W_2^4 + U_2,$$

gilt sogar

$$2M \sim 2^3 \circ M + W_3^4. \quad (11)$$

Vergleichen wir diese Beziehung mit (6), so ergibt sich

$$2^3 \circ M + W_3^4 \sim 2^2 \circ M + W_1^4 \quad \text{bzw.} \quad 2^3 \circ M + W_3^4 \sim W_1^4.$$

Wegen $W_1^4, W_3^4 \in \mathbf{Z}_4$ und $F_4(W_1^4) > F_4(W_3^4)$ gibt es aber sicher einen vierdimensionalen Würfel λW mit $W_3^4 + 2^2 \circ \lambda W \sim W_1^4$, so dass $2^2 \circ M \sim 2^2 \circ \lambda W$, nach Hilfssatz 7 also $M \sim \lambda W$ gilt, womit $\mathbf{S}^4 \subset \mathbf{W}^4$, insgesamt also $\mathbf{S}^4 = \mathbf{W}^4$ bewiesen ist.

LITERATUR

- [1] H. HADWIGER, *Polytopes and Translative Equidecomposability*, Amer. Math. Monthly 79, 275–276 (1972).
- [2] H. HADWIGER, *Mittelpunktspolyeder und translative Zerlegungsgleichheit*, Math. Nachr. 8, 53–58 (1952).
- [3] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer (Berlin 1957).
- [4] H. HADWIGER, *Translationsinvariante, additive und schwachstetige Polyederfunktionale*, Arch. Math. 3, 387–394 (1952).
- [5] H. HADWIGER, *Translative Zerlegungsgleichheit der Polyeder des gewöhnlichen Raumes*, J. reine angew. Math. 233, 200–212 (1968).
- [6] E. HERTEL, *Zur translativen Zerlegungsgleichheit n -dimensionaler Polyeder*, Publ. Math. Debrecen (im Druck).
- [7] B. JESSEN, *Zur Algebra der Polytope*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. II. 4, 47–53 (1972).

A Criterion for n -Fold Transitivity of Transformation Groups

Let G be a group and let X be a nonempty set. An *action* $*$ on X is a function $*$: $G \times X \rightarrow X$ such that for every $g, h \in G$ and $x \in X$, (i) $(gh) * x = g * (h * x)$ and (ii) $1 * x = x$.

A triple $(G, X, *)$ where $*$ is an action of G on X is called a *transformation group*. For $S \subseteq X$ the stability subgroup of S is $G_S = \{g \in G \mid g * s = s \text{ for every } s \in S\}$. (We will write G_x instead of $G_{\{x\}}$.)

If n is a positive integer, we say that G is *n -fold transitive* whenever for every two sequences x_1, x_2, \dots, x_n and y_1, y_2, \dots, y_n each consisting of n distinct elements of X , there exists $g \in G$ such that $g * x_i = y_i$ for every $i = 1, 2, \dots, n$.

We note that if $*$ is an action of G on X , then for any $S \subseteq X$, $*$ induces an action of G_S on $X - S$.

The next theorem is well known (see, for example, [1], Theorem 9.1).

Theorem 1: Let $(G, X, *)$ be transitive. Then for $n \geq 2$, $(G, X, *)$ is n -fold transitive iff there exists an $x \in X$ such that $(G_x, X - \{x\}, *)$ is $(n - 1)$ -fold transitive.

It is our purpose in this note to derive a corollary (Theorem 2) of this theorem which is sometimes more convenient to use. The essential idea is to replace the transitive condition on $(G, X, *)$ by a restriction on the stability subgroups.

Lemma 1: If $(G, X, *)$ is a transformation group, then $(G, X, *)$ is 2-fold transitive iff there exists an $x \in X$ such that $G_x \neq G$ and $(G_x, X - \{x\}, *)$ is transitive.

Proof: Clearly if $(G, X, *)$ is 2-fold transitive then the given condition holds for any $x \in X$.

Now suppose $x \in X$ such that $G_x \neq G$ and $(G_x, X - \{x\}, *)$ is transitive. Let $y, z \in X$. If $y, z \in X - \{x\}$, then there exists $g \in G_x$ such that $g * y = z$. If $y = z = x$, then $1 * y = z$. If $y = x$ and $z \neq x$, then since $G_x \neq G$, there exists $h \in G$ such that $h * x \neq x$. So there is an $r \in G_x$ such that $r * (h * x) = z$ and so $(rh) * x = z$. If $y \neq x$, $z = x$ and h is as before, then there exists $t \in G_x$ such that $t * y = h * x = h * z$ so that $(h^{-1}t) * y = z$. Hence $(G, X, *)$ is transitive so that by Theorem 1 it is 2-fold transitive.

Lemma 2: Let $n \geq 2$ and $|X| > 1$. Then $(G, X, *)$ is n -fold transitive iff there exists an $x \in X$ such that $G_x \neq G$ and $(G_x, X - \{x\}, *)$ is $(n - 1)$ -fold transitive.