Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1974)
Heft: 3

Artikel: Eine extremale Verteilung von Grosskreisen

Autor: Linhart, Johann

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29894

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 29 Heft 3 Seiten 57–80 10. Mai 1974

Eine extremale Verteilung von Grosskreisen

Wie verteilt man bei der Erforschung eines kugelförmigen Planeten n Satellitenbahnen so, dass der maximale Abstand eines Oberflächenpunktes von der nächsten Satellitenbahn möglichst klein wird? Eine Antwort auf diese Frage ergäbe sich aus der Richtigkeit der folgenden

Vermutung[1]: *In einem durch n Grosskreise bestimmten Mosaik auf der Einheitskugel ist der grösste Inkreisradius stets $\geqslant \pi/2n$, und Gleichheit tritt genau im Falle des regulären Mosaiks $\{2,2n\}$ ein (d.h., wenn die Grosskreise durch ein festes antipodisches Punktepaar gehen und «gleichmässig» verteilt sind).*

Wenn wir die Grosskreise durch ihre Pole ersetzen, so erhalten wir eine duale Aussage, die zu obiger gleichwertig ist. Da man die Menge aller antipodischen Punktepaare auf der Kugel als elliptische Ebene bezeichnet, können wir unsere Vermutung daher auch so formulieren:

Der Radius des (kleinsten) Umkreises von n Punkten der elliptischen Ebene ist stets $\leqslant \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn die Punkte äquidistant auf einer Geraden verteilt sind.

Diese Vermutung ist für $n \leqslant 2$ trivial, und für $n = 3$ wurde sie schon bewiesen [1]. Wir wollen sie nun für $n = 4$ beweisen (unsere Methode ist mit einigen Vereinfachungen auch für $n = 3$ brauchbar).

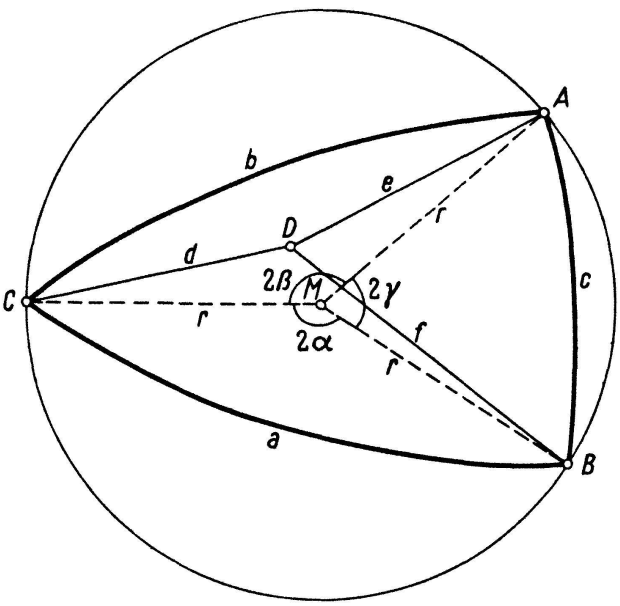
Satz: *In einem durch 4 Grosskreise bestimmten Mosaik auf der Einheitskugel ist der grösste Inkreisradius stets $\geqslant \pi/8$ mit Gleichheit genau im Fall des regulären Mosaiks $\{2,8\}$.*

Beweis: Seien (A,A'), (B,B'), (C,C') und (D,D') vier antipodische Punktepaare auf der Einheitskugel. Wir wählen von jedem Paar einen Punkt so aus, dass bei dem entstehenden sphärischen Viereck die Summe der Längen der sechs Verbindungsstrecken möglichst klein wird. Wir können annehmen, dass die Bezeichnung so gewählt ist, dass gerade $ABCD$ dieses Viereck mit minimaler «Seitensumme» ist. Wir werden zeigen, dass der Umkreisradius r dieses Vierecks im allgemeinen $< \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)$ und nur im oben beschriebenen Extremfall $= 3/8\,\pi$ ist.

[1]) Die Anregung, mich mit diesem Problem zu beschäftigen, ging von Prof. Fejes Tóth aus, von dem auch diese Vermutung stammt.

Die Summe der Längen der drei von einem Eckpunkt P des Vierecks ausgehenden Seiten bezeichnen wir mit s_P. Wenn wir P durch seinen Antipoden P' ersetzen und die anderen Punkte fest lassen, so sehen wir: $s_P + s_{P'} = 3\pi$. Daraus ergibt sich, dass $s_P \leqslant 3/2\,\pi$ sein muss, da wir sonst durch Ersetzung von P durch P' ein Viereck mit kleinerer Seitensumme erhielten.

Sei $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $d = CD$, $e = DA$, $f = DB$, und a die längste dieser sechs Seiten (Figur). Wir wollen uns zunächst überlegen, dass die vier Punkte A, B,



C, D auf einer offenen Halbkugel liegen. Bekanntlich genügt es dazu, zu zeigen, dass man diese Punkte durch ein Polygon der Länge $< 2\pi$ verbinden kann (vgl. z.B. [2], S. 221f). Wenn $a \leqslant \pi/2$ ist, so sind alle Seiten $\leqslant \pi/2$, und mindestens eine $< \pi/2$ da nicht alle $= \pi/2$ sein können, womit dieser Fall erledigt ist. Wenn $a > \pi/2$ ist, gilt $s_C + s_B = 2a + b + c + d + f \leqslant 3\pi$, und daher $b + c + d + f < 2\pi$. Also ist jedenfalls $r < \pi/2$. Nehmen wir nun $r \geqslant 3\pi/8$ an. Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. $a = 2r$.

Wenn die vier Punkte nicht auf einem Grosskreis liegen, ist $s_C + s_B = 2a + (b + c) + (d + f) > 2a + a + a = 4a = 8r \geqslant 3\pi$, im Widerspruch zu $s_C + s_B \leqslant 3\pi$. Wenn die Punkte auf einem Grosskreis liegen, so ist $s_C + s_B = 4a$, also notwendigerweise $a = 3\pi/4$, und es ist leicht zu sehen, dass die Punkte dann äquidistant sein müssen (sonst wäre es durch Übergang zu geeigneten Antipoden möglich, die längste Seite zu verkleinern).

2. $a < 2r$.

(Von nun an wird nicht mehr verwendet, dass a die grösste Seite ist, sondern nur, dass die grösste Seite $< 2r$ ist). In diesem Fall liegen mindestens drei Punkte, sagen wir A, B und C auf dem Umkreis. Wir nehmen an, dass $a \geqslant b \geqslant c$ ist. Sei M der Mittelpunkt des Umkreises, und $2\alpha = \sphericalangle BMC$, $2\beta = \sphericalangle CMA$, $2\gamma = \sphericalangle AMB$. Im folgenden wird mehrmals von der leicht verifizierbaren Tatsache Gebrauch gemacht, dass die Funktion

$$g(x) := 2 \arcsin(\sin r \cdot \sin x)$$

im Intervall $(0, \pi)$ streng konkav ist. Wir unterscheiden nun folgende Möglichkeiten:

2a. $a = b$ und $63°1' \leqslant \alpha < 90°$.

Wir zeigen, dass in diesem Fall $s_C + s_B > 3\pi$ ist, was wie oben einen Widerspruch ergibt. Sei $h(\alpha) = 4a + c \leqslant s_C + s_B$. $h(\alpha) = 4\,g(\alpha) + g(2\alpha)$ ist konkav, wir haben daher nur die Randwerte zu überprüfen: $h(90°) = 8r \geqslant 3\pi$, und $h(63°1') > 3\pi$ (es genügt klarerweise, dies für $r = 3\pi/8$ nachzurechnen).

2b. $a > b$ und $63°1' \leqslant \alpha < 90°$

Wir bewegen A auf dem Umkreis auf B zu, bis $b = a$ ist. Da $\beta > \gamma$, nimmt dabei (wegen der Konkavität von g) $b = g(\beta)$ weniger zu als $c = g(\gamma)$ ab, also wird $b + c$ kleiner, und es folgt nach 2a): $s_B + s_C \geqslant 3a + b + c > 3\pi$.

2c. $60° \leqslant \alpha \leqslant 63°1'$.

Wenn wir A wie im Fall 2b) bewegen, wird $b + c$ kleiner. Anschliessend bewegen wir A und B mit gleicher Geschwindigkeit zueinander, solange bis $\alpha = \beta = 63°1'$ ist. Dabei wird $b + c = g(\alpha) + g(2\alpha)$ nochmals kleiner, wie eine einfache Rechnung zeigt. Es folgt:

$b + c \geqslant g(63°1') + g(106°2') =: v(r)$. Nun ist $e \leqslant \frac{3\pi}{2} - (b + c)$, $f \leqslant \frac{3\pi}{2} - (a + c) \leqslant \frac{3\pi}{2} - (b + c)$, $d \leqslant \frac{3\pi}{2} - (a + b) \leqslant \frac{3\pi}{2} - (b + c)$, und daher d, e und $f \leqslant \frac{3\pi}{2} - v(r)$. $v(r)$ ist monoton wachsend, also folgt wegen $v\left(\frac{3\pi}{8}\right) > 207{,}5°$: d, e und f sind $\leqslant \frac{3\pi}{2} - v\left(\frac{3\pi}{8}\right) < 62{,}5°$.

Der Durchschnitt der drei Kreise mit Radius $r \geqslant 3\pi/8$ und Mittelpunkten A, B, C besteht nur aus dem Punkt M. Verkleinert man den Radius auf $62{,}5°$, so wird der Durchschnitt leer. Da d, e und $f < 62{,}5°$ sind, wäre jedoch D ein Element dieses Durchschnitts. Damit ist der Satz bewiesen.

Johann Linhart, Universität Salzburg

LITERATUR

[1] ROSTA, VERA, *An Extremal Arrangement of three Great Circles on the Sphere*, Mat. Lapok *24* (1973). (to appear).

[2] FEJES TÓTH, L., *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1965.

Mittelpunktspolyeder im E^4

1. Es sei $\boldsymbol{P}^4$ die Menge der eigentlichen Polyeder (Polytope) des vierdimensionalen euklidischen Raumes E^4. Mit $\boldsymbol{S}^4$ bezeichnen wir die Menge aller konvexen vierdimensionalen Mittelpunktspolyeder im engeren Sinne – das sind zentralsymmetrische Polyeder, deren sämtliche dreidimensionale Seitenflächen ebenfalls zentralsymmetrisch sind [1]. Zwei Polyeder A und B aus $\boldsymbol{P}^4$ heissen translativ zerlegungsgleich ($A \sim B$), wenn sie sich in endlich viele paarweise translationsgleiche Teilpolyeder zerlegen lassen. Ist W ein fester vierdimensionaler Würfel der Kantenlänge 1, so bezeichnen