

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 29 (1974)
Heft: 2

Artikel: Ein reduziertes Erzeugenden-System der Kongruenzgruppe in der Ebene
Autor: Botsch, O.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-29893>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 19.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

and let $\xi \in (0, 1)$ be irrational. Since the sequences $(A_n(\xi))$ and $(A_n(1 - \xi))$ converge to finite limits, they are Cauchy sequences. Hence there exists $N_{\varepsilon, \xi}$ such that for $n > N_{\varepsilon, \xi}$ we have $|A_n(\xi) - A_{n-1}(\xi)| < \varepsilon$ and $|A_n(1 - \xi) - A_{n-1}(1 - \xi)| < \varepsilon$. Since ξ is irrational, $[\xi n] \neq \xi n$ and, consequently, by the previous lemma, we know that either (ii) $[\xi n] = [\xi(n-1)]$ or (iii) $[(1 - \xi)n] = [(1 - \xi)(n-1)]$ is true. In the first case, we have

$$|a_n| = \left| \sum_{k=[\xi n]+1}^n a_k - \sum_{k=[(n-1)\xi]+1}^{n-1} a_k \right| = \left| A_n(\xi) - A_{n-1}(\xi) \right| < \varepsilon.$$

In the second case, we have

$$|a_n| = \left| \sum_{k=[n(1-\xi)]+1}^n a_k - \sum_{k=[(n-1)(1-\xi)]+1}^{n-1} a_k \right| = \left| A_n(1 - \xi) - A_{n-1}(1 - \xi) \right| < \varepsilon$$

Thus, for $n > N_{\varepsilon, \xi}$ we have $|a_n| < \varepsilon$ and the theorem is proved.

I am deeply grateful to Professor R. Bojanic for his suggestions and guidance throughout the writing of this paper.

Rada Higgins, Ohio State University Columbus, USA

REFERENCE

- [1] R. BOJANIC, E. SENETA, *A Unified Theory of Regularly Varying Sequences*, Math. Z., to appear.

Elementarmathematik und Didaktik

Ein reduziertes Erzeugenden-System der Kongruenzgruppe in der Ebene

1. Die Gruppe der Kongruenz-Abbildungen der Ebene

Unter einer *Isometrie* oder *Kongruenz-Abbildung* γ in der Ebene versteht man das Produkt aus endlich vielen Geraden-Spiegelungen. Bezeichnet σ_g die Spiegelung an der Geraden g , dann ist also

$$\gamma = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \dots \circ \sigma_n. \quad (1)$$

Die Achsenspiegelung ist eine involutorische Abbildung; wird die Bildfigur einer gegebenen Urfigur an der gleichen Achse gespiegelt, so ergibt sich wieder die Urfigur. Das Produkt jeder Spiegelung mit sich selbst ist daher die *identische Abbildung* ι , die jeden Punkt der Ebene auf sich selbst abbildet:

$$\sigma_a \circ \sigma_a = \iota. \quad (2)$$

Hieraus folgt, dass die Kongruenz-Abbildung γ nach (1) eine *inverse Abbildung* γ^{-1} besitzt:

$$\gamma^{-1} = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_c \circ \sigma_b \circ \sigma_a. \quad (3)$$

In den Produkten $\gamma \circ \gamma^{-1}$ und $\gamma^{-1} \circ \gamma$ sind nämlich Produkte von je zwei gleichen Spiegelungen vorhanden, die man wegen (2) jeweils streichen kann. Man erhält dann schliesslich

$$\gamma \circ \gamma^{-1} = \iota \quad \text{und} \quad \gamma^{-1} \circ \gamma = \iota. \quad (4)$$

Es sei noch erwähnt, dass die Produkte von Kongruenz-Abbildungen assoziativ sind, d. h.

$$(\gamma_1 \circ \gamma_2) \circ \gamma_3 = \gamma_1 \circ (\gamma_2 \circ \gamma_3) . \quad (5)$$

Das Produkt von Kongruenzabbildungen ergibt nach Definition stets wieder eine Kongruenzabbildung. Zu den Kongruenzabbildungen gehört nach (2) auch die identische Abbildung ι als Neutralelement mit

$$\iota \circ \gamma = \gamma \circ \iota = \gamma . \quad (6)$$

Nach (4) gibt es zu jeder Kongruenzabbildung eine Inverse. Versteht man unter K die Menge aller Kongruenz-Abbildungen der Ebene, so ist das Verknüpfungsgebilde $[K; \circ]$ eine *Gruppe*.

2. Die verschiedenen Typen von Kongruenz-Abbildungen

Zur Einteilung der Menge K aller Kongruenz-Abbildungen wird als charakterisierendes Merkmal die *Mindestzahl von Achsenspiegelungen* gewählt, die zur Erzeugung der jeweiligen Abbildung gemäss (1) erforderlich ist. Hat das Produkt n Faktoren, so heisst die Abbildung auch *n-fach-Spiegelung*.

Das Produkt $\sigma_a \circ \sigma_b$ zweier Spiegelungen an Achsen a und b ist nur dann von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig, wenn die beiden Achsen entweder zusammenfallen oder orthogonal sind:

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ a \perp b \end{array} \right\} = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a . \quad (7)$$

Im Falle $a = b$ ist die Abbildung $\sigma_a \circ \sigma_b$ die *Identität* ι , im Falle $a \perp b$ ist sie die *Punktspiegelung* π_P am Schnittpunkt P der beiden Achsen. Für die Punktspiegelung π_P ist die besondere Lage der in P orthogonalen Achsen unerheblich: Falls $a \cap b = c \cap d = \{P\}$ und $a \perp b$; $c \perp d$ ist:

$$\pi_P = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c \circ \sigma_d .$$

Achsen- und Punkt-Spiegelungen sind die einzigen involutorischen Kongruenz-Abbildungen:

$$\sigma_a \circ \sigma_a = \iota ; \quad \pi_P \circ \pi_P = \iota \quad \text{oder} \quad \sigma_a^{-1} = \sigma_a ; \quad \pi_P^{-1} = \pi_P .$$

Für die übrigen Produkte aus zwei Geradenspiegelungen sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Die beiden Achsen schneiden sich in einem Punkt S . Dieser ist dann Drehpunkt der *Rotation* ϱ um S .
2. Die beiden Achsen sind parallel. Die Doppelspiegelung ist dann eine *Translation* τ .

$$a \cap b = \{S\} \Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = \varrho \quad (8)$$

$$a \cap b = \{\emptyset\} \Rightarrow \sigma_a \circ \sigma_b = \tau . \quad (9)$$

Im Falle der Drehung ist der Drehwinkel δ doppelt so gross wie der orientierte Winkel zwischen den Geraden a und b :

$$\delta = 2 w(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) . \quad (10)$$

Liegt eine Translation vor, dann ist der Schiebvektor v der 2-fache Abstandsvektor zwischen den Parallelen a und b :

$$\vec{v} = 2 d(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) . \quad (11)$$

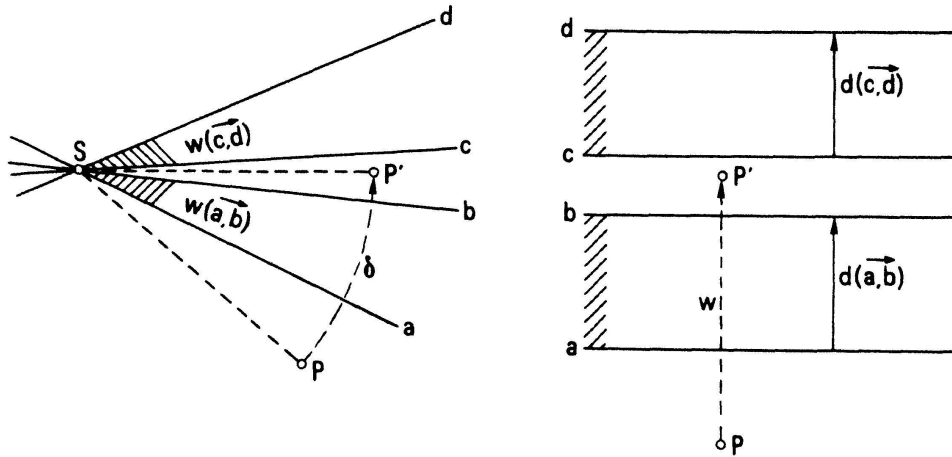


Fig. 1

Zwei Drehungen bzw. Schiebungen sind identisch, falls sie in Dreh-Punkt und -Winkel, bzw. im gerichteten Abstand der Parallelen übereinstimmen:

$$\varrho = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c \circ \sigma_d \quad \text{für} \quad a \cap b = c \cap d = \{S\} \quad \text{und} \quad w(\overrightarrow{a,b}) = w(\overrightarrow{c,d}) \quad (12)$$

$$\tau = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_c \circ \sigma_d \quad \text{für} \quad a \parallel b \parallel c \parallel d \quad \text{und} \quad d(\overrightarrow{a,b}) = d(\overrightarrow{c,d}) \quad (13)$$

Satz: Das Produkt von zwei Doppelspiegelungen ist stets wieder eine Doppelspiegelung.

Der Beweis dieses Satzes sei exemplarisch lediglich für einen, allerdings umfassenden, Sonderfall durchgeführt (Fig. 2).

Es seien zwei Paare nichtparalleler Achsen $a \neq b$, $c \neq d$ gegeben, ihre Schnittpunkte heißen P und Q . Die Gerade PQ werde mit $b' = c'$ bezeichnet. Die Drehung $\varrho_P = \sigma_a \circ \sigma_b$ werde zurückgeführt auf eine Doppelspiegelung an Achsen a' , b' ; entsprechend werde die Rotation $\varrho_Q = \sigma_c \circ \sigma_d$ umgeformt:

$$\varrho_P = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{a'} \circ \sigma_{b'} \quad \text{mit} \quad a \cap b = a' \cap b' = \{P\} \quad \text{und} \quad w(\overrightarrow{a,b}) = w(\overrightarrow{a',b'})$$

$$\varrho_Q = \sigma_c \circ \sigma_d = \sigma_{c'} \circ \sigma_{d'} \quad \text{mit} \quad c \cap d = c' \cap d' = \{Q\} \quad \text{und} \quad w(\overrightarrow{c,d}) = w(\overrightarrow{c',d'})$$

Dann ist:

$$\beta = \sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c \circ \sigma_d = \varrho_P \circ \varrho_Q = \sigma_{a'} \circ \sigma_{b'} \circ \sigma_{c'} \circ \sigma_{d'}. \quad (14)$$

Da $b' = c'$ gewählt wurde, ist $\sigma_{b'} \circ \sigma_{c'} = \iota$ und somit:

$$\beta = \sigma_{a'} \circ \sigma_{d'}. \quad (15)$$

Dies ist im allgemeinen (nämlich, falls $a' \neq d'$) eine neue Drehung um den Schnittpunkt R der neuen Achsen a' , d' . Entsprechende Beweisgänge zeigen, dass das Produkt zweier Schiebungen, zweier Punktspiegelungen sowie das Produkt von Drehung und Schiebung (oder umgekehrt) stets eine Schiebung ist.

Während das Produkt aus vier Spiegelungen keinen neuen Typus von Kongruenz-Abbildungen liefert, ergibt das Produkt von drei Spiegelungen im allgemeinen eine neue Art von Abbildungen, die *Schub-* oder *Gleit-Spiegelungen*, die hier nicht weiter erörtert werden sollen. Darüber hinaus gibt es keine anderen Kongruenzabbildungen: jede gerade Anzahl von Spiegelungen kann durch Paarung schrittweise als Doppelspiegelung dargestellt werden, bei ungerader Zahl von Spiegelungen resultiert dann eine Dreifach- oder eine Einfach Spiegelung. Somit gilt:

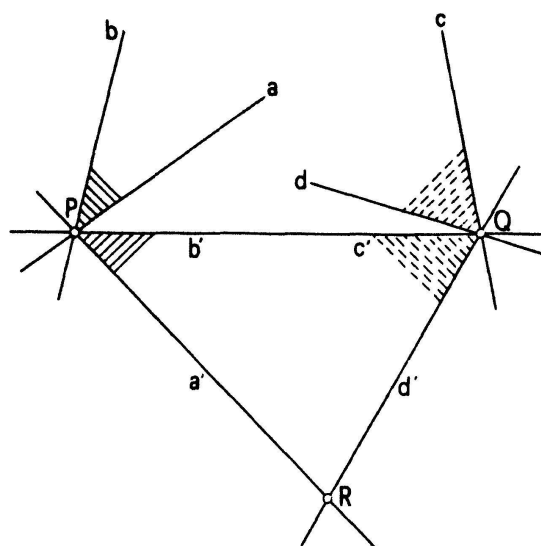


Fig. 2

Satz: Jede Kongruenzabbildung der Ebene kann als Produkt von höchstens drei Achsenspiegelungen dargestellt werden.

Die Geraden-Spiegelungen bilden also ein Erzeugenden-System für die Kongruenz-Gruppe.

Wegen seiner Bedeutung für das Nachfolgende sei noch das Produkt $\sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_b$ mit $a \neq b$ besprochen:

Es sei $a \cap b = \{S\}$ und $\sigma_b(a) = a_b$. Dann ist: $w(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = w(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a_b})$ und daher:

$$\varrho_s = \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_{a_b}$$

oder nach rechtsseitiger Multiplikation mit σ_b :

$$\sigma_b \circ \sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_{a_b}. \quad (16)$$

Die scheinbare Dreifach-Spiegelung ist eine Einfach-Spiegelung an einer neuen Achse a_b , die sich durch Spiegelung von a an b ergibt.

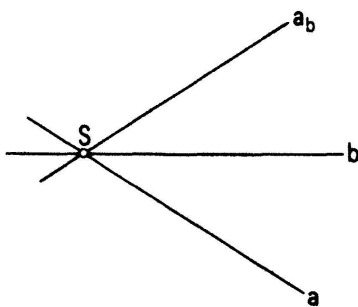


Fig. 3

3. Ein reduziertes Erzeugenden-System der Gruppe $[K; \circ]$

Durchmustert man die Vielzahl der Kongruenz-Abbildungen der Ebene, so findet man: genau eine Identität, je ∞^2 Achsen- und Punkt-Spiegelungen und Schiebungen, sowie je ∞^3 Drehungen und Schubspiegelungen. Sie alle können erzeugt werden durch die ∞^2 Achsenspiegelungen. Es wird gezeigt werden, dass sich die

Erzeugenden-Menge noch wesentlich reduzieren lässt auf die ∞^1 Spiegelungen an Achsen eines Geradenbüschels und nur einer weiteren Achsenspiegelung. Man kann sich sogar auf einen beliebig kleinen Ausschnitt des Geradenbüschels beschränken.

3.1. Geradenbüschel \overline{G} und Teilbüschel \overline{G}_t

Die Menge aller Geraden g_i durch einen Punkt Z ist das Geradenbüschel

$$\overline{G} = \{g_i \mid g_i \ni Z\}, \quad i \in R, \quad 0 \leq i < 2\}.$$

Hierbei sei die Indexmenge i die Menge der reellen Zahlen zwischen 0 und 2, wobei i so zu wählen ist, dass für den Winkel gegen eine Gerade g_0 gilt:

$$w(\overrightarrow{g_0}, \overrightarrow{g_i}) = i \cdot 90^\circ.$$

Im besonderen ist: $g_0 \perp g_1$.

Ist t eine beliebig kleine Zahl (z.B. 10^{-6}), dann ist

$$\overline{G}_t = \{g_i \mid g_i \ni Z \wedge i \leq t < 2\}$$

ein Teilbüschel von \overline{G} .

Es werde bezeichnet: die Spiegelung an g_i mit σ_i und die Rotation um Z :

$$\sigma_0 \circ \sigma_i = \varrho_{0,i}$$

Unter der p -ten Potenz einer Rotation werde das p -fache Produkt der Rotation verstanden: $\varrho^p = \varrho \circ \varrho \circ \varrho \circ \dots \circ \varrho$.

Es gilt

$$\varrho_{0,i} = \sigma_0 \circ \sigma_i = \sigma_i \circ \sigma_{2i} = \sigma_{2i} \circ \sigma_{3i} = \dots$$

daher:

$$\varrho_{0,i}^p = (\sigma_0 \circ \sigma_i) \circ (\sigma_i \circ \sigma_{2i}) \circ \dots \circ (\sigma_{(p-1)i} \circ \sigma_{pi}) = \sigma_0 \circ \sigma_{pi}.$$

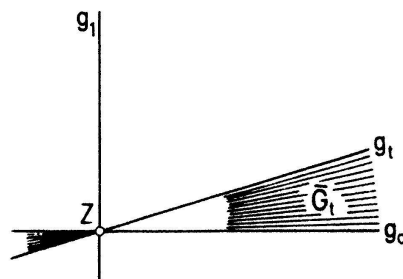


Fig. 4

Eine beliebige Gerade $g_q \in \overline{G}$ kann als Gerade g_{pi} geschrieben werden mit $q = pi$, $p \in \mathbb{N}$ und $i \leq t$.

Aus der Gleichung

$$\varrho_{0,i}^p = (\sigma_0 \circ \sigma_i)^p = \sigma_0 \circ \sigma_{pi}$$

folgt nach Links-Multiplikation mit σ_0 für die Spiegelung an einer beliebigen Geraden des (Voll-)Büschels \overline{G} :

$$\sigma_q = \sigma_{pi} = \sigma_0 \circ (\sigma_0 \circ \sigma_i)^p \quad \text{mit} \quad g_0, g_i \in \overline{G}_t.$$

Die Spiegelungen an Geraden des Vollbüschels \bar{G} werden daher durch Spiegelungen an Geraden des Teilbüschels \bar{G}_t erzeugt.

3.2. Die äquidistanten Büschel

Ausser \bar{G}_t sei zusätzlich eine büschelfremde Gerade $h \notin \bar{G}$ gegeben. Sie stehe im Punkt H senkrecht zu g_0 :

$$h \perp g_0; \quad h \cap g_0 = \{H\}; \quad H \neq Z.$$

Es gibt die Punktspiegelungen und die Translationen

$$\pi_Z = \sigma_0 \circ \sigma_1 = \sigma_1 \circ \sigma_0; \quad \pi_H = \sigma_0 \circ \sigma_h = \sigma_h \circ \sigma_0$$

$$\tau = \sigma_1 \circ \sigma_h = \pi_Z \circ \pi_H; \quad \tau^{-1} = \sigma_h \circ \sigma_1 = \pi_H \circ \pi_Z.$$

Auf der Geraden g_0 liegen äquidistant die Zentren Z_k mit:

$$\tau(Z) = Z_1, \quad \tau(Z_1) = \tau^2(Z) = Z_2, \dots, \tau^n(Z) = Z_n$$

und

$$\tau^{-1}(Z) = Z_{-1}, \quad \tau^{-1}(Z_{-1}) = \tau^{-2}(Z) = Z_{-2}, \dots, \tau^{-n}(Z) = Z_{-n}$$

wobei

$$Z_k \in g_0 \quad \text{und} \quad \overrightarrow{Z_k Z_{k+1}} = 2 \cdot \overrightarrow{ZH} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad Z = Z_0.$$

Für die Potenzen der Translationen gilt

$$\tau^n = (\sigma_1 \circ \sigma_h)^n = (\pi_Z \circ \pi_H)^n \quad \text{und} \quad \tau^{-n} = (\sigma_h \circ \sigma_1)^n = (\pi_H \circ \pi_Z)^n.$$

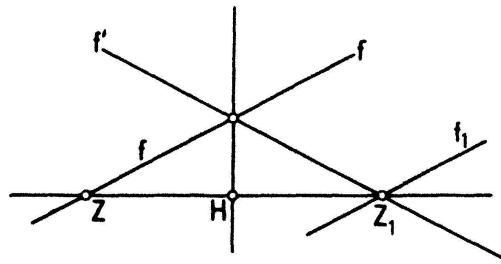


Fig. 5

Eine beliebige Gerade $f = g_q \in \bar{G}$ werde an h nach f' und von da an g_0 nach f_1 gespiegelt:

$$\sigma_h(f) = f' \quad \text{und} \quad \sigma_0(f') = f_1.$$

Dann gilt für die Spiegelungen an diesen Geraden nach (16)

$$\sigma'_f = \sigma_h \circ \sigma_f \circ \sigma_h \quad \text{und} \quad \sigma_{f_1} = \sigma_0 \circ \sigma'_f \circ \sigma_0$$

daher:

$$\sigma_{f1} = \sigma_0 \circ (\sigma_h \circ \sigma_f \circ \sigma_h) \circ \sigma_0 = (\sigma_0 \circ \sigma_h) \circ \sigma_f \circ (\sigma_h \circ \sigma_0) = \pi_H \circ \sigma_f \circ \pi_H. \quad (17)$$

Demnach können alle Spiegelungen an Achsen f_1 des Büschels $\bar{G}_1 = \{f_1 \mid f_1 \ni Z_1\}$ durch Spiegelungen an Achsen $f \in \bar{G}$ erzeugt werden.

Wegen $f_1 = \pi_H(f)$ ist $f_1 \parallel f$. Es gibt eine Translation $\tau_f = \sigma_f \circ \sigma_{f1}$ oder wegen (17):

$$\tau_f = (\sigma_f \circ \pi_H)^2 = (\sigma_f \circ \sigma_0 \circ \sigma_h)^2.$$

Benennt man alle Parallelen zu f durch die Zentren Z_k mit f_k , d.h. $f_k \ni Z_k$ und $f_k \parallel f$, so gilt für die Translation

$$\tau_f = \sigma_f \circ \sigma_{f1} = \sigma_{f1} \circ \sigma_{f2} = \dots = \sigma_{f,k-1} \circ \sigma_{fk}$$

daher:

$$\tau_f^k = (\sigma_f \circ \sigma_{f1})^k = (\sigma_f \circ \sigma_{f1}) \circ (\sigma_{f1} \circ \sigma_{f2}) \circ \dots \circ (\sigma_{f,k-1} \circ \sigma_{fk}) = \sigma_f \circ \sigma_{fk}.$$

Aus $\sigma_f \circ \sigma_{fk} = \tau_f^k = (\sigma_f \circ \sigma_0 \circ \sigma_h)^{2k}$ folgt durch Links-Multiplikation mit σ_f für die Spiegelung σ_{fk} an der Geraden f_k des Büschels \bar{G}_k :

$$\sigma_{fk} = \sigma_f \circ (\sigma_f \circ \sigma_0 \circ \sigma_h)^{2k} \quad (18)$$

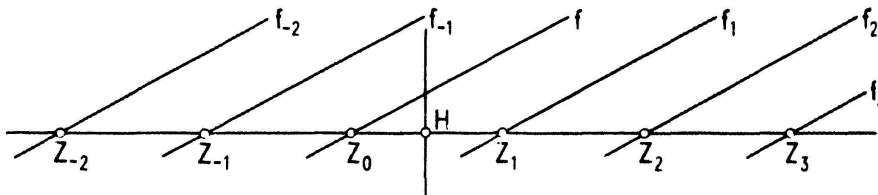


Fig. 6

Die Spiegelungen an beliebigen Achsen eines Büschels \bar{G}_k werden durch die Spiegelungen an h und an Achsen von \bar{G} erzeugt.

3.3. Erzeugung einer beliebigen Spiegelung σ_a ¹⁾

Es sei a eine beliebige Gerade der Ebene ($a \notin \bar{G}_k$, $a \neq h$). Man zeichne um ein beliebiges Büschelzentrum Z_s den Kreis k , der die Gerade a berührt, sodann von einem Zentrum Z_r ausserhalb des Kreises k eine Tangente v_r an ihn. Ihr Schnitt mit der Geraden a sei S , und die Gerade SZ_s sei w_s . Diese Gerade w_s ist Symmetrieachse zu den beiden Tangenten v_r und a an den Kreis k . Daher gilt nach (16):

$$\sigma_a = \sigma_{ws} \circ \sigma_{vr} \circ \sigma_{ws}$$

Die Menge von Achsen-Spiegelungen

$$\Sigma = \{\sigma_x \mid x \in \bar{G}_t \wedge x \neq h\}$$

¹⁾ Nach einem Vereinfachungsvorschlag von M. Jeger/Zürich.

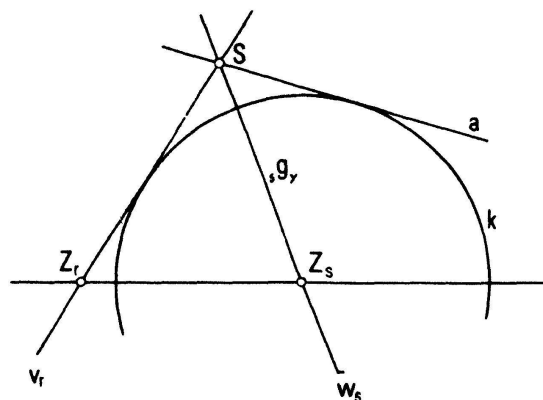


Fig. 7

erzeugt sämtliche Achsenspiegelungen und damit sämtliche Kongruenz-Abbildungen der Ebene.

Σ ist ein reduziertes Erzeugenden-System für die Gruppe $[K; \circ]$.

O. Botsch, Heidelberg

Aufgaben

Aufgabe 689. Man gebe eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen so an, dass gilt: Zu jeder positiven reellen Zahl s existiert eine streng monotone Abbildung $h_s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ derart, dass die Potenzreihe

$$\sum a_{h_s(n)} z^{h_s(n)}$$

genau den Konvergenzradius s besitzt.

P. Dierolf, München

Lösung des Aufgabenstellers: Sei $\{r_n: n \in \mathbb{N}\}$ irgendeine Abzählung der positiven rationalen Zahlen. Wir setzen $a_n := (r_n)^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Zu $s > 0$ gibt es dann offenbar eine Teilfolge $(r_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim r_{k(n)} = 1/s$. Aus der Formel für die Berechnung des Konvergenzradius der Reihe

$$\sum a_{k(n)} z^{k(n)}$$

erhält man:

$$1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k(n)]{|a_{k(n)}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup r_{k(n)} = 1/s.$$

Aufgabe 690. Für den halben Umfang s , den Umkreisradius R und den Inkreisradius r eines Dreiecks beweise man

$$2s^2 \geq r[20R - r + \sqrt{3(12R + r)(4R - 5r)}] \geq 32Rr - 10r^2,$$

mit Gleichheit genau für $a = b = c$.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Lösung (mit Verschärfung): In der Lösung der Aufgabe 688 (Band 29 (1973), Seite 19, (6)) wurde die Gültigkeit von

$$s^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R - 2r)\sqrt{R(R - 2r)} \quad (*)$$

nachgewiesen. Diese Ungleichung ist schärfer als die linksseitige Ungleichung der vorliegenden Aufgabe.