

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 29 (1974)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Über ein sechsgliedriges räumliches Getriebe  
**Autor:** Kunze, S.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-29891>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 29

Heft 2

Seiten 25–56

10. März 1974

## Über ein sechsgliedriges räumliches Getriebe

Eine räumliche kinematische Kette mit sechs Gliedern  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_6$  sei gegeben; je zwei in zyklischer Reihe aufeinanderfolgende Glieder seien durch Drehgelenke miteinander verbunden; deren Achsen seien mit  $a_{12}, a_{23}, \dots, a_{61}$  bezeichnet. Je zwei aufeinanderfolgende Drehachsen  $a_{i-1i}$  und  $a_{ii+1}$  sollen sich normal kreuzen und deren Gemeinlote  $l_i$  ein geschlossenes räumliches Sechseck mit den Eckpunkten  $A_{12}, \dots, A_{61}$  bilden. Dessen Seitenlängen seien mit  $e_i$  bezeichnet (siehe Abb. 1).

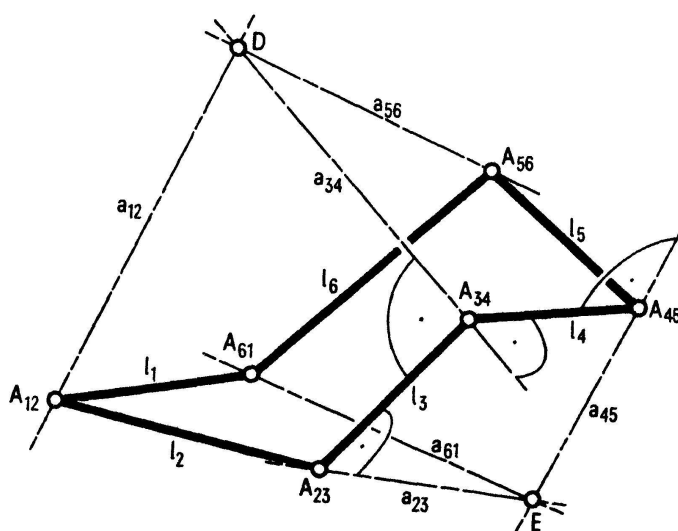


Abbildung 1

Der errechnete Freiheitsgrad einer solchen Sechsgelenkskette ist  $F = 0$ ; R. Bricard [4] hat jedoch gezeigt, dass diese Kette genau dann einen Zwanglauf gestattet, wenn die Bedingung

$$e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 - e_4^2 + e_5^2 - e_6^2 = 0 \quad (1)$$

erfüllt ist. Der Beweis sei kurz angedeutet:

Die Gemeinlote  $l_2$  und  $l_3$  liegen in einer Ebene normal zu  $a_{23}$ . Wegen  $a_{12} \perp a_{23} \perp a_{34}$  müssen  $a_{12}$  und  $a_{34}$  ebenfalls dieser Ebene angehören. Nach zyklischer Vertauschung folgt: Die Drehachsen  $a_{12}, a_{34}, a_{56}$  sind die Schnittgeraden der Verbindungsebenen  $l_2 l_3, l_4 l_5, l_6 l_1$ , gehen daher durch einen gemeinsamen Punkt D. Analog schneiden sich

$a_{23}, a_{45}, a_{61}$  in einem Punkt  $E$ . Eine mehrmalige Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes auf die von den Seiten des Gemeinlotsechsecks und den Punkten  $D$  oder  $E$  gebildeten Dreiecke zeigt nach Bricard die Notwendigkeit der Bedingung (1). Auf die Beweglichkeit dieser Kette schliesst Bricard nach Abzählen der Parameter.

Die Beweglichkeit lässt sich aus folgendem Grund vermuten: Nach Bricard [4] besteht genau dann *infinitesimale Beweglichkeit* («Wackeligkeit» nach W. Wunderlich [7]) einer sechsgliedrigen Drehgelenkskette, wenn die sechs Drehachsen einem linearen Strahlkomplex angehören. Diese Bedingung ist im obigen Fall erfüllt, da die Drehachsen in zwei Strahlbündeln enthalten sind.

In der vorliegenden Note soll nun jener *Sonderfall* eingehend behandelt werden, bei welchem alle Seitenlängen  $e_i$  gleich sind; es gelte

$$e_i = 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, 6. \quad (2)$$

Hier ist zunächst ein *Ausnahmefall* zu beachten: Fallen die Sechseckseiten  $l_6$  und  $l_1$  zusammen, so decken sich die Drehachsen  $a_{56}$  und  $a_{12} \cdot l_2$  und  $l_3$  müssen mit  $a_{12}$  und  $a_{34}$  in einer Ebene liegen, ebenso  $l_5$  und  $l_4$  mit  $a_{56}$  und  $a_{34}$ . Diese Ebenen sind wegen  $a_{12} = a_{56}$  identisch; es fallen somit auch  $l_2$  mit  $l_5$  sowie  $l_3$  mit  $l_4$  zusammen. In dieser Lage hat die Kette den *Freiheitsgrad*  $F = 2^1$ ). Dieser Ausnahmefall sei im folgenden ausgeschlossen durch die Voraussetzung

(V) *Es sollen keine zwei benachbarten Seiten des Gemeinlotsechsecks zusammenfallen.*

Damit ist noch ein Zwangslauf möglich und es gilt

**Satz 1:** *In jeder Bewegungslage schneiden sich die gegenüberliegenden Drehachsen. Ihre Verbindungsebene ist jeweils eine Symmetrieebene der Gelenkskette.*

*Beweis:* Die gegenüberliegenden Achsen  $a_{12}$  mit  $A_{12}$  und  $a_{45}$  mit  $A_{45}$  seien herausgegriffen und vorübergehend festgehalten. Relativ zu  $a_{12}$  sind  $A_{23}$  und  $A_{61}$  auf einem Kreis  $k_{12}$  mit der Achse  $a_{12}$  und dem Mittelpunkt  $A_{12}$  beweglich;  $a_{23}$  bzw.  $a_{61}$  sind Tangenten dieses Kreises in  $A_{23}$  bzw.  $A_{61}$ . Relativ zu  $a_{45}$  sind  $A_{23}$  und  $A_{61}$  auf einem Torus  $\Phi_{45}$  – wegen (2) ein Dorntorus – mit der Achse  $a_{45}$  und Mittelpunkt  $A_{45}$  beweglich;  $a_{23}$  bzw.  $a_{61}$  sind Meridiantangenten des Torus  $\Phi_{45}$  in  $A_{23}$  bzw.  $A_{61}$  (siehe Abb. 2).

In den Punkten  $A_{23}$  und  $A_{61}$  – wegen (V) gilt  $A_{23} \neq A_{61}$  – muss somit *der Kreis  $k_{12}$  den Torus  $\Phi_{45}$  berühren*; die gemeinsamen Tangenten  $a_{23}, a_{61}$  schneiden sich im Punkt  $E$  auf  $a_{45}$ . Die Berührungspunkte  $A_{23}$  und  $A_{61}$  dürfen wegen (V) nicht mit dem singulären Punkt  $A_{45}$  des Dorntorus zusammenfallen, liegen daher auf demselben Parallelkreis. Die Symmetrieebene  $\varepsilon$  zu  $A_{23}$  und  $A_{61}$  enthält die Torusachse  $a_{45}$ , aber auch die Achse  $a_{12}$  des Kreises  $k_{12}$ . Bei Spiegelung an  $\varepsilon$  geht das ganze Gemeinlotsechseck in sich über.

Die Symmetrieebene  $\varepsilon$  enthält die Punkte  $D \in a_{12}$  und  $E \in a_{45}$ . Analog gibt es zwei weitere Symmetrieebenen der Sechsgelenkskette durch die Gerade  $s = DE$ . *Das Gemeinlotsechseck mit den sechs Drehachsen geht somit auch bei Drehungen durch  $120^\circ$  um die Achse  $s$  in sich über.* Als Folge dieser Symmetrieeigenschaften gilt

<sup>1)</sup> Es ist dies ein Ausartungsfall der von G. T. Bennet [1] gefundenen *sechsgliedrigen Drehgelenkskette mit Freiheitsgrad  $F = 2$* .

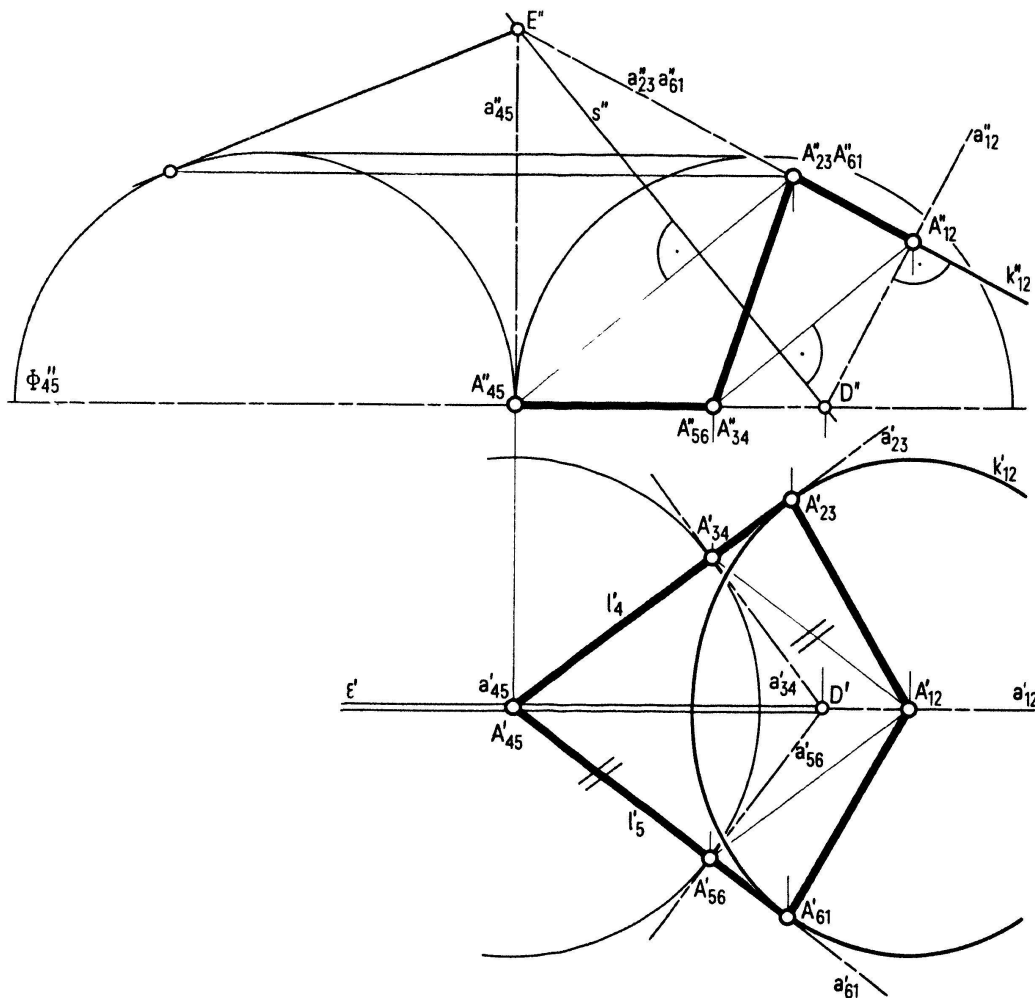


Abbildung 2

**Satz 2:** In einem Normalriss in Richtung der Drehachse  $a_{45}$  sind die Bilder der Punkte  $A_{34}$ ,  $A_{45}$ ,  $A_{56}$  und  $A_{12}$  die Eckpunkte eines Rhombus mit der Seitenlänge 1.

*Beweis:*  $a_{23}$  und  $a_{56}$  liegen in einer Symmetrieebene. Bei Spiegelung an dieser Ebene vertauschen sich  $A_{12}$  und  $A_{34}$  sowie  $A_{45}$  und  $A_{61}$ ; die Verbindungsgeraden  $A_{12}A_{34}$  und  $A_{45}A_{61}$  sind daher zueinander parallel. In einem Normalriss in Richtung  $a_{45}$  (siehe Grundriss in Abb. 2) liegen die Bilder von  $A_{45}$ ,  $A_{56}$ ,  $A_{61}$  auf derselben Geraden; die durch  $A_{45}$  gehende Symmetrieebene  $\varepsilon$  ist projizierend und die Sechseckseiten  $l_4$  und  $l_5$  erscheinen in wahrer Grösse. Damit entsteht der angegebene Rhombus.

Beim Nachweis der Beweglichkeit der Kette zeigt sich zugleich die überraschende Eigenschaft

**Satz 3:**<sup>2)</sup> Je zwei Gegenecken des Gemeinlotsechsecks haben den konstanten Abstand  $d = \sqrt{3}$ .

*Beweis:*  $l_1$  mit  $a_{61}$  und  $a_{12}$  werde festgehalten (siehe Abb. 3).  $a_{56}$  hüllt einen Kreis  $k_{61}$  ein,  $a_{23}$  einen Kreis  $k_{12}$ . Diese Kreise liegen in zueinander normalen Ebenen und

<sup>2)</sup> Dieses Ergebnis dürfte als erster P. SCHATZ aus Basel gefunden haben; es ist nämlich in der von ihm entwickelten «Turbula» Schüttelmaschine der Schweizer Firma W. A. Bachofen berücksichtigt (vgl. [3]). Eine diesbezügliche Veröffentlichung von P. SCHATZ ist den Verfassern jedoch nicht bekannt.



jeder enthält den Mittelpunkt des anderen. Da sich die gegenüberliegenden Achsen  $a_{23}$  und  $a_{56}$  in einem Punkt  $S$  schneiden müssen, ist ihre Verbindungsebene  $\varepsilon$  eine Ebene der *Verbindungstorse*  $\Psi$  der Kreise  $k_{12}$  und  $k_{61}$ .  $\varepsilon$  ist nach Satz 1 eine Symmetrieebene der Kette. Wegen der freien Wahl von  $S$  auf  $l_1$  gestattet die Kette einen Zwanglauf.

Führt man kartesische Koordinaten ein mit  $A_{61}$  als Ursprung,  $l_1$  als  $x$ -Achse,  $a_{61}$  als  $z$ -Achse, und setzt man für  $S$  die Koordinaten  $(\xi, 0, 0)$  an, so erhält man für

$$A_{56}: \left( \frac{1}{\xi}, \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi}, 0 \right), \quad \text{für} \quad A_{23}: \left( \frac{\xi}{\xi - 1}, 0, \pm \frac{\sqrt{\xi(\xi - 2)}}{\xi - 1} \right).$$

Reelle Koordinaten sind dabei nur bei

$$\xi \leq -1 \quad \text{oder} \quad \xi \geq 2 \quad (3)$$

möglich. Für den Abstand  $d = \overline{A_{56} A_{23}}$  errechnet man daraus den *konstanten* Wert  $d = \sqrt{3}$ .

Jede Symmetrieebene  $\varepsilon$  des Gemeinlotsechsecks enthält ein Paar gegenüberliegender Ecken, also einen Durchmesser. Da  $\varepsilon$  auch  $D$  und  $E$  enthält, *schneiden sich alle drei Durchmesser ständig in einem Punkt  $M$  der dreizähligen Symmetrieachse  $s$*  (siehe Abb. 4).

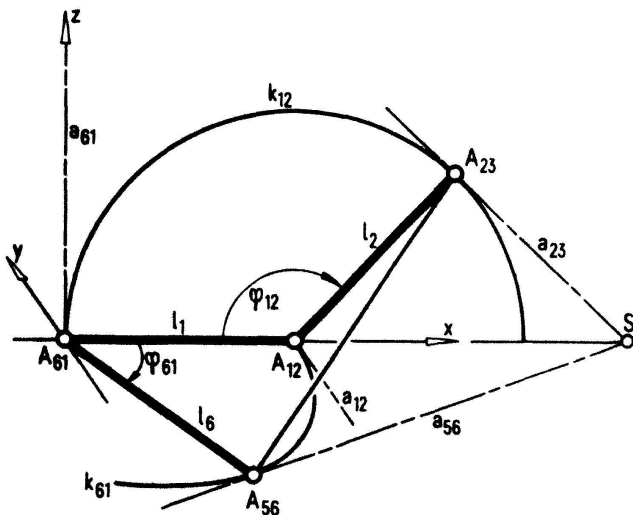


Abbildung 3

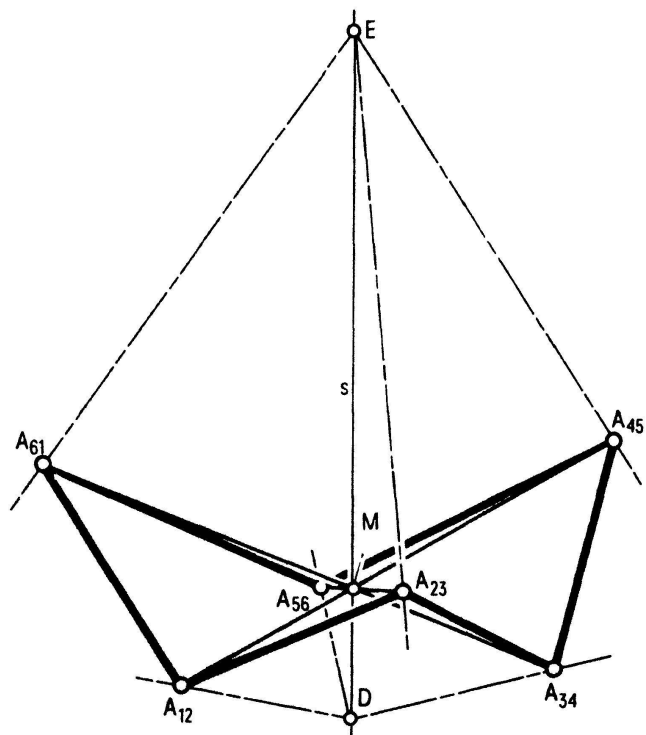


Abbildung 4

Bezeichnet man die *Innenwinkel* des Gemeinlotsechsecks mit  $\varphi_{ii+1}$ , so folgt aus Abb. 3

$$\cos \varphi_{12} = \frac{1}{1 - \xi}, \quad \cos \varphi_{61} = \frac{1}{\xi}. \quad (4)$$

Aus der Drehsymmetrie folgt

$$\varphi_{12} = \varphi_{34} = \varphi_{56}, \quad \varphi_{23} = \varphi_{45} = \varphi_{61}. \quad (5)$$

Im Grenzfall  $\xi = \infty$  sind alle Innenwinkel rechte Winkel; die sechs Gemeinlote gehören einem *Würfel* an<sup>3)</sup>; die drei Durchmesser sind die drei Raumdiagonalen (siehe Abb. 5b). Bei  $\varphi_{12} = \varphi_{34} = \varphi_{56} = 180^\circ$  gilt  $\varphi_{23} = \varphi_{45} = \varphi_{61} = 60^\circ$ . Die Seiten des Sechsecks fallen paarweise in dieselben Geraden und bilden insgesamt ein *gleichseitiges Dreieck*; die Sechseckdurchmesser sind die Symmetralen des Dreiecks. Wegen (3) werden die Innenwinkel im Reellen niemals kleiner als  $60^\circ$ ; daher ist keine Verzweigungslage mit dem in (V) ausgeschlossenen zweiparametrischen Bewegungsvorgang möglich.

Der periodische Bewegungsablauf zeigt sich am besten am Modell, etwa einem Kartonmodell: Die sechs Glieder werden durch Tetraeder ausgeführt, welchen die je zwei Drehachsen und das Gemeinlot als Kanten angehören (vgl. [5], Fig. 1 H). Ist  $e$  die Länge der Sechseckseiten, so ist die Länge der Kanten längs der Drehachsen kleiner als  $e/\sqrt{3}$  zu wählen, damit das Modell durchstülperbar bleibt.

Zum Abschluss sollen zwei spezielle räumliche Zwangsläufe untersucht werden, die als *Relativbewegungen* bei dieser Kette auftreten:

**1. Die Relativbewegung  $\Sigma_4/\Sigma_1$ :** Nach Satz 1 entstehen die Lagen von  $\Sigma_4$  durch Spiegelung von  $\Sigma_1$  an den Ebenen  $\varepsilon$  der Verbindungstorse  $\Psi$  der Kreise  $k_{12}$  und  $k_{61}$  (siehe Abb. 3). Zwei verschiedene Lagen von  $\Sigma_4$  gehen stets durch zwei Spiegelungen an Ebenen von  $\Psi$ , also durch eine Drehung um die Schnittgerade dieser Ebenen oder durch eine Translation ineinander über. Ein Grenzübergang zeigt: Die Bewegung  $\Sigma_4/\Sigma_1$  ist in jedem Augenblick eine *Drehung* um eine Erzeugende von  $\Psi$ .  $\Psi$  ist somit die Rastachsenfläche; die Gangachsenfläche entsteht durch Spiegelung von  $\Psi$ .

**Satz 4:** Der räumliche Zwangslauf  $\Sigma_4/\Sigma_1$  ist eine symmetrische Rollung mit der Torse  $\Psi$  als Rastachsenfläche.

In Abb. 5a ist eine Lage der Gelenkskette in Grund- und Aufriss dargestellt.  $a_{61}$  ist im Grundriss projizierend,  $a_{12}$  im Aufriss. Wird  $\Sigma_1$  festgehalten, so ist  $A_{45}$  einerseits auf einem Torus  $\Phi_{61}$  mit der Achse  $a_{61}$ , andererseits nach Satz 3 auf einer Kugel mit dem Mittelpunkt  $A_{12}$  und dem Radius  $\sqrt{3}$  beweglich, also auf einer *Kurve  $c_{45}$  vierter Ordnung, erster Art*<sup>4)</sup>. Nach Satz 2 bilden die Aufrisse der Punkte  $A_{61}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{45}$  einen Rhombus mit der Seitenlänge 1;  $c_{45}''$  ist daher ein *Kreis* mit Mittelpunkt  $A_{61}''$  und Radius 1. In dem in Abb. 3 eingeführten Koordinatensystem erfüllt  $c_{45}$  die Gleichungen

$$x^2 + z^2 = 1, \quad (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 3.$$

Elimination von  $z$  ergibt für den Grundriss die Gleichung

$$y^2 = 2x + 1.$$

$c_{45}'$  ist eine *Parabel* mit  $A_{61}'$  als Brennpunkt. Analog beschreibt  $A_{34}$  bei der Bewegung  $\Sigma_4/\Sigma_1$  eine Kurve  $c_{34}$ , die im Grundriss als Kreis und im Aufriss als Parabel erscheint. (In Abb. 5a wurden nur der halbe Grundriss und der halbe Aufriss dargestellt. Abb. 5b zeigt ein axonometrisches Bild). Die *Bahnen allgemeiner Punkte* aus  $\Sigma_4$

<sup>3)</sup> Diese speziellen Lagen dürften P. SCHATZ zu seinen «Umstülpungen des Würfelgürtels» angeregt haben (vgl. *El. Math.* 26 (1971), Seite 84, Fussnote 2).

<sup>4)</sup> Vgl. K. STRUBECKER, *Über die Kugelschnitte des Torus*, Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-ber., Abt. II, 180, 137–175 (1972).

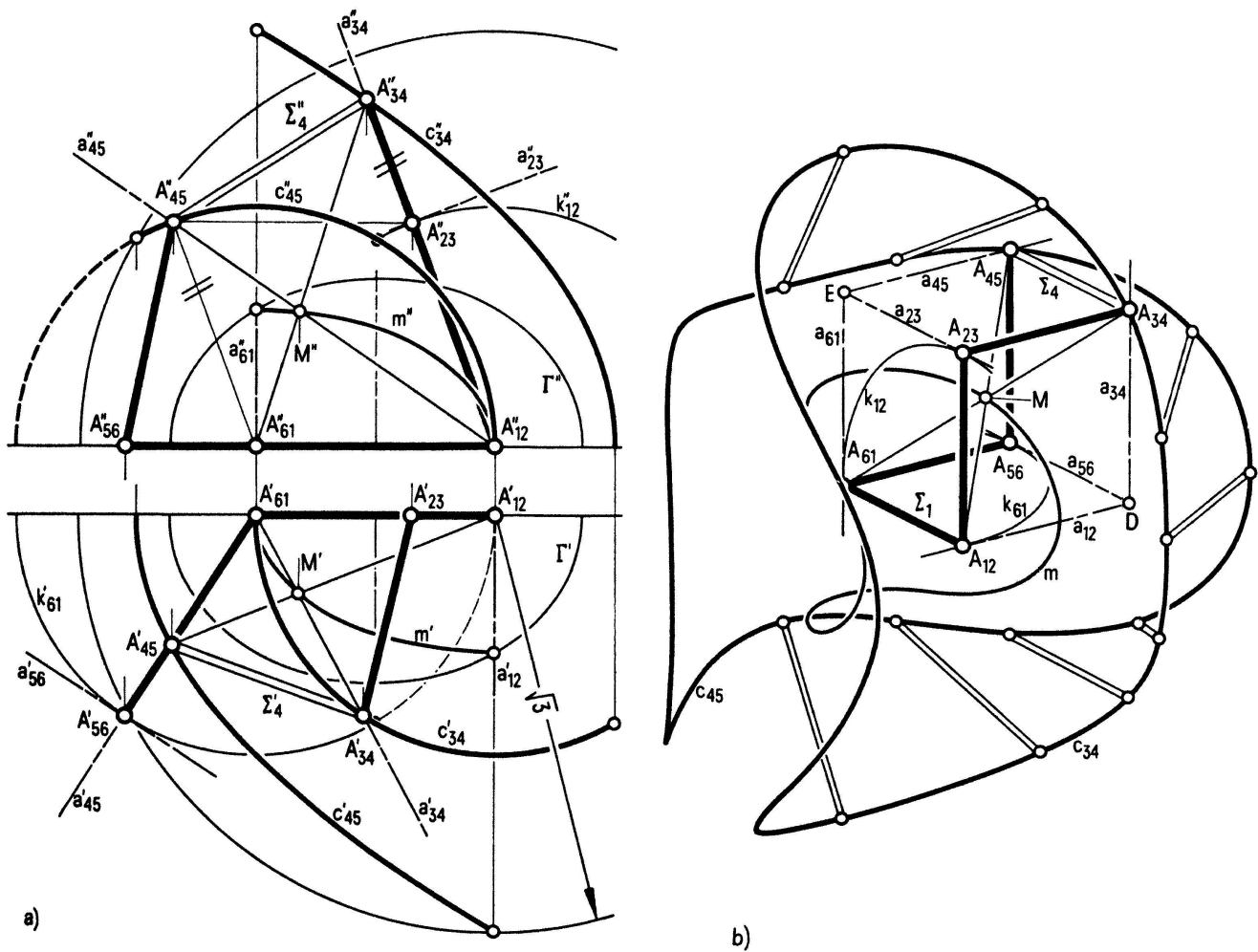


Abbildung 5

entstehen durch Spiegelung eines in  $\Sigma_1$  festen Punktes an den Ebenen der Torse  $\Psi$  vierter Klasse, sind daher *Raumkurven achter Ordnung*<sup>5)</sup>.

Während der Bewegung  $\Sigma_4/\Sigma_1$  ändert auch der Schnittpunkt  $M$  der Sechseckdurchmesser, der natürlich nicht dem System  $\Sigma_4$  angehört, seine Lage gegenüber  $\Sigma_1$ . Seine Ortslinie  $m$  muss auf einem *Drehellipsoid*  $\Gamma$  mit den Brennpunkten  $A_{61}$  und  $A_{12}$  und der Hauptachsenlänge  $\sqrt{3}/2$  liegen, denn aus der Drehsymmetrie des Sechsecks folgt

$$\overline{A_{61}M} + \overline{A_{12}M} = \overline{A_{61}M} + \overline{A_{34}M} = \overline{A_{61}A_{34}} = \sqrt{3}.$$

Andererseits liegt  $M$  auf dem Durchmesser  $A_{23}A_{56}$ , also auf der Torse  $\Psi$ . Bei Spiegelung an der Tangentialebene  $\varepsilon$  der Torse in  $M$  vertauschen sich die Leitstrahlen  $A_{61}M$  und  $A_{12}M$ .  $\varepsilon$  halbiert den Aussenwinkel der Leitstrahlen, berührt daher das Ellipsoid  $\Gamma$  in  $M$ . Die Bahnkurve  $m$  von  $M$  ist als *Berührkurve der Torse  $\Psi$  vierter Klasse mit  $\Gamma$  die Polarkurve zu  $\Psi$  bzgl.  $\Gamma$ , also von vierter Ordnung*<sup>6)</sup>. Ihre Bilder  $m'$ ,  $m''$  in Abb. 5a sind doppelt überdeckt, daher Kegelschnitte. Sie sind nach den Gesetzen der Polarität als Polarkurven zu den Spurkreisen  $k_{61}$  bzw.  $k_{12}$  der Torse  $\Psi$  bzgl. der scheinbaren

<sup>5)</sup> Die Bahnkurven sind zentrisch ähnlich zu den bei Torsen in Kurven ausgearteten Fusspunktflächen. Diese Kurven entsprechen der Torse in der quadratischen Fusspunkttransformation.

<sup>6)</sup> Diejenigen Flächen zweiter Klasse, die die Torse  $\Psi$  berühren, bilden bekanntlich eine Linear-schar. Dieser Schar gehören das Drehellipsoid  $\Gamma$  sowie die singulären «Flächen»  $k_{61}$  und  $k_{12}$  an.

Umrissse von  $\Gamma$  konstruierbar.  $m'$  ist eine *Ellipse* mit  $A'_{12}$  als Mittelpunkt und  $A'_{61}$  als Hauptscheitel; nur die linke Hälfte tritt als Bild reeller Raumpunkte  $M$  auf.  $m''$  ist dazu kongruent.

**2. Die «Turbula»-Bewegung:** Bei der in Fussnote 2 genannten «Turbula» Schüttelmaschine wird eine Symmetrieebene, etwa die Verbindungsebene  $\varepsilon$  der Achsen  $a_{12}$  und  $a_{45}$  festgehalten. Nach Satz 3 können zusätzlich noch in  $\varepsilon$  die Punkte  $A_{12}$  und  $A_{45}$  befestigt werden. Nun werden nur  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$ ,  $\Sigma_4$  materiell ausgeführt; der symmetrische Teil wird weggelassen. In  $\Sigma_3$  liegt der Behälter mit dem zu vermischenen Material. Der Antrieb erfolgt durch Drehung von  $a_{12}$  um  $A_{12}$  in  $\varepsilon$ .

In Abb. 6 ist eine Lage von  $\Sigma_3$  bei der Bewegung  $\Sigma_3/\varepsilon$  dargestellt;  $\varepsilon$  und damit auch die Achsen  $a_{12}$  und  $a_{45}$  liegen parallel zur Grundrissebene: Nach Satz 2 bilden die Punkte  $A_{61}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{23}$  gemeinsam mit der Projektion  $N_{45}$  von  $A_{45}$  in Richtung von  $a_{12}$  in die Verbindungsebene der drei genannten Punkte einen Rhombus. Diese Ver-

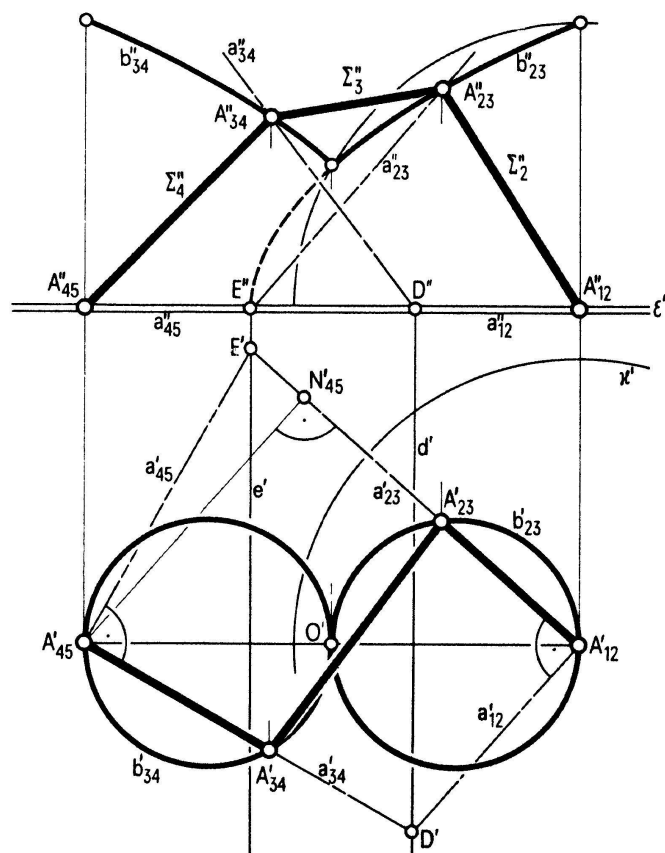


Abbildung 6

bindungsebene ist im Grundriss von Abb. 6 projizierend und  $A_{23}$  und  $A_{61}$  haben denselben Bildpunkt. Damit ist  $A'_{23}$  der Mittelpunkt der Strecke  $N'_{45} A'_{12}$ . Ist  $O$  der Mittelpunkt der ortsfesten Strecke  $A_{12} A_{45}$ , so bilden  $O'$ ,  $A'_{23}$ ,  $A'_{12}$  ein rechtwinkeliges Dreieck. Die Bahn  $b_{23}$  des Punktes  $A_{23}$  erscheint im Grundriss als *Kreis* mit  $O' A'_{12}$  als Durchmesser. Andererseits liegt  $A_{23}$  auf der Einheitskugel  $\kappa$  mit dem Mittelpunkt  $A_{12}$ . Die Bahnkurve  $b_{23}$  ist somit eine *Kurve vierter Ordnung, erster Art*. Eine einfache Rechnung ergibt für den Aufriss eine *Parabel* mit dem Parameter  $\sqrt{3}/4$ ; deren Scheitel teilt die Strecke  $A'_{12} A'_{45}$  innen im Verhältnis 2:1.  $b_{23}$  besteht aus zwei bzgl.  $\varepsilon$  symmetrischen Kurvenzügen, von welchen nur einer durchlaufen wird. Analog erhält man eine zu  $b_{23}$  symmetrisch liegende Bahnkurve  $b_{34}$  des Punktes  $A_{34}$ .

Der zur Lage von  $A_{23}$  gehörige Schnittpunkt  $E$  der Drehachsen ist der Spurpunkt der Drehachse  $a_{23}$  in  $\varepsilon$ .  $a_{23}$  berührt in  $A_{23}$  die Kugel  $\kappa$  mit dem Mittelpunkt  $A_{12}$ . Im Grundriss liegen  $E'$ ,  $A'_{12}$  und  $A'_{23}$  auf einer Geraden.  $E'$  entspricht daher dem Punkt  $A'_{23}$  in einer *Inversion* an dem in  $\varepsilon$  liegenden Grosskreis von  $\kappa$ . Die Bahn  $e$  von  $E$  ist invers zu  $b'_{23}$ , daher eine *Gerade normal zum ortsfesten Durchmesser*  $A_{12} A_{45}$ . Analog durchläuft  $D$  eine zu  $e$  parallele Gerade  $d$  in  $\varepsilon$ . Rechnung zeigt, dass  $d$  und  $e$  die Strecke  $A_{12} A_{45}$  dritteln. Damit sind nun die Lagen von  $\Sigma_3$  in Grund- und Aufriss konstruierbar. Auch die in [3] abgeleiteten Formeln für die Abhängigkeit der Drehwinkel vom Antriebswinkel (= Winkel zwischen  $A_{12} A_{45}$  und  $a_{12}$  in  $\varepsilon$ ) lassen sich nun mit Hilfe von (4) und (5) sehr einfach bestätigen.

Die *Momentanachse* der Bewegung  $\Sigma_3/\varepsilon$  sei mit  $03$  bezeichnet. Das zu  $\Sigma_3$  bzgl.  $\varepsilon$  symmetrisch liegende System  $\Sigma_6$  hat eine zu  $03$  symmetrisch liegende Momentanachse  $06$ . Die Achse  $36$  der Relativbewegung  $\Sigma_3/\Sigma_6$  ist analog zu Satz 4 der Sechseckdurchmesser  $A_{12} A_{45}$ . Die drei Achsen  $03$ ,  $06$ ,  $36$  müssen bekanntlich (siehe etwa [2]) ein *gemeinsames Gemeinlot* haben. Das Gemeinlot der bzgl.  $\varepsilon$  symmetrisch liegenden Achsen  $03$  und  $06$  liegt in  $\varepsilon$ . Damit es  $36$  normal schneidet, muss  $03$  ständig parallel sein zur ortsfesten Normalebene zu  $\varepsilon$  durch  $36 = A_{12} A_{45}$ . *Die Rastachsenfläche ist somit konoidal.*

Die Bewegungen  $\Sigma_3/\varepsilon$  und  $\Sigma_6/\varepsilon$  sind in jedem Augenblick bzgl.  $\varepsilon$  symmetrisch. Damit haben die Punkte von  $\varepsilon$ , falls man sie einmal als Punkte von  $\Sigma_3$ , einmal als Punkte von  $\Sigma_6$  auffasst, bzgl.  $\varepsilon$  symmetrische Geschwindigkeitsvektoren. Es gibt nun bekanntlich (siehe etwa [6], 164) eine *Bahntangente*  $t$  in  $\varepsilon$  als Ort jener Punkte, deren Bahntangenten in  $\varepsilon$  liegen. Für die Punkte von  $t$  sind die Geschwindigkeitsvektoren bei den Bewegungen  $\Sigma_3/\varepsilon$  und  $\Sigma_6/\varepsilon$  identisch; die Punkte von  $t$  bleiben daher bei der Relativbewegung  $\Sigma_3/\Sigma_6$  augenblicklich in Ruhe. *Damit muss  $t$  mit der Momentandrehachse  $36$  zusammenfallen*;  $36$  ist also stets Bahntangente der Bewegungen  $\Sigma_3/\varepsilon$  und  $\Sigma_6/\varepsilon$ . Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man die Formeln über die gegenseitige Lage der Achsen  $03$ ,  $06$ ,  $36$  heranzieht (siehe [2], 132). Zusammengefasst gilt

**Satz 5:** *Die Rastachsenfläche der Bewegung  $\Sigma_3/\varepsilon$  ist eine konoidale Regelfläche. Der ortsfeste Durchmesser  $A_{12} A_{45}$  ist stets eine Bahntangente.*

Da ausserdem noch die Bahntangenten der Punkte  $A_{23}$  und  $A_{34}$  bei der Bewegung  $\Sigma_3/\varepsilon$  vorliegen, lässt sich die Momentanachse  $03$  mit Hilfe der Eigenschaften des *Normalengewindes* konstruieren. Eine zweite Konstruktionsmöglichkeit ergibt sich aus den bekannten Relativdrehungen  $\Sigma_3/\Sigma_2$  und  $\Sigma_3/\Sigma_4$  und der mit Hilfe der Bahntangenten konstruierbaren Achsen der Relativdrehungen  $\Sigma_2/\varepsilon$  und  $\Sigma_4/\varepsilon$ .

S. Kunze, TH Graz und H. Stachel, TH Graz

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. T. BENNET, *The Skew Isogram Mechanism*, Proc. London Math. Soc. 13, 151–173 (1913/14).
- [2] R. BEYER, *Technische Raumkinematik* (Springer, Berlin 1963).
- [3] V. BRÁT, *A Six-Link Spatial Mechanism*, Jnl. Mechanisms 4, 325–336 (1969).
- [4] R. BRICARD, *Leçon de Cinématique, II* (Gauthier-Villars, Paris 1927).
- [5] M. GOLDBERG, *New Five-Bar and Six-Bar Linkages in Three Dimensions*, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. 65, 649–661 (1943).
- [6] H. R. MÜLLER, *Kinematik* (Sammlung Götschen Bd. 584/584a, Berlin 1963).
- [7] W. WUNDERLICH, *Starre, kippende, wackelige und bewegliche Gelenkvierecke im Raum*, El. Math. 26, 73–83 (1971).