

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 28 (1973)
Heft: 6

Artikel: Volumen und Schwerpunkt von Polyedern
Autor: Schneider, Rolf
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-29462>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 24.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 28

Heft 6

Seiten 137–160

10. November 1973

Volumen und Schwerpunkt von Polyedern

Im Rahmen einer formalen Theorie des Inhaltes kennt man eine Reihe verschiedenartiger axiomatischer Kennzeichnungen des Volumens geeigneter Punktmenge. Auch einzelne aus dem Volumen ableitbare reellwertige geometrische Funktionale, die insbesondere in der Theorie der konvexen Körper und der Integralgeometrie eine bedeutende Rolle spielen, sind durch einige ihrer Eigenschaften charakterisiert worden. Über diesen Themenkreis kann man sich in dem Buch von Hadwiger [1] sehr gut informieren.

Zu diesen «Funktionsätzen» sind unlängst vektorielle Gegenstücke aufgewiesen worden ([2]–[4]), die im wesentlichen axiomatische Charakterisierungen gewisser Schwerpunkte zum Inhalt haben. In verwandter Weise soll in der vorliegenden Note zu einer bekannten Kennzeichnung des Volumens eine parallele Aussage hergeleitet werden, die sich auf eine Kennzeichnung des gewöhnlichen Schwerpunktes eigentlicher Polyeder bezieht. Der Beweis ergibt sich im Kern durch naheliegende und sinngemäße Übertragung der von Hadwiger [1] benutzten Methoden und belegt damit erneut die Leistungsfähigkeit der dort eingesetzten Hilfsmittel für Fragestellungen der hier ins Auge gefassten Art.

Es bezeichne E^n ($n \geq 1$) den n -dimensionalen euklidischen Vektorraum (mit Skalarprodukt \langle , \rangle und Norm $\| \|$) und \mathfrak{P} die Klasse der *eigentlichen Polyeder* des E^n , also aller Vereinigungen endlich vieler konvexer Polytope mit inneren Punkten im E^n . Unter einem *Funktional* auf \mathfrak{P} wollen wir zunächst ganz allgemein eine Abbildung von \mathfrak{P} in eine (additiv geschriebene) abelsche Gruppe verstehen. Unter den Eigenschaften, die ein solches Funktional besitzen kann, spielen hier die folgenden eine Rolle:

Das Funktional φ heisst *einfach additiv*, wenn

$$\varphi(P \cup Q) = \varphi(P) + \varphi(Q) \quad \text{für alle } P, Q \in \mathfrak{P} \quad \text{mit } (P \cap Q)^\circ = \emptyset$$

gilt; dabei bezeichnet M° den offenen Kern der Menge M . Als *translationsinvariant* wird φ bezeichnet, wenn

$$\varphi(P + t) = \varphi(P) \quad \text{für alle } t \in E^n$$

gilt; hier ist $P + t$ das durch Translation um den Vektor t aus P hervorgehende Polyeder. Ist der Bildbereich von φ der Vektorraum E^n , so heisst φ *translationsäquivalent*, wenn

$$\varphi(P + t) = \varphi(P) + t \quad \text{für alle } t \in E^n$$

gilt. Sind dagegen die Werte von φ reelle Zahlen, so wird φ als *normiert* bezeichnet, wenn

$$\varphi(W) = 1$$

ist, wobei W ein fester Würfel der Kantenlänge 1 sein soll, und als *definit*, wenn

$$\varphi(P) \geqq 0 \quad \text{für alle } P \in \mathfrak{P}$$

gilt.

Nun kann die Abbildung V , die jedem Polyeder P sein Volumen $V(P)$ zuordnet, in der folgenden Weise axiomatisch gekennzeichnet werden:

Satz 1 (Hadwiger): *Sei $\varphi: \mathfrak{P} \rightarrow \mathbf{R}$ ein Funktional mit den folgenden Eigenschaften:*

$$\varphi \text{ ist translationsinvariant,} \tag{1}$$

$$\varphi \text{ ist einfach additiv,} \tag{2}$$

$$\varphi \text{ ist definit,} \tag{3}$$

$$\varphi \text{ ist normiert.} \tag{4}$$

Dann ist $\varphi = V$.

Satz und Beweis findet man bei Hadwiger [1], S. 37–39. Der Satz ist hier nur der Vollständigkeit halber wiedergegeben, da er als Vorbild für eine nachfolgende Aussage über den Schwerpunkt dienen soll.

Der *Schwerpunkt* $s(P)$ eines Polyeders $P \in \mathfrak{P}$ kann bekanntlich erklärt werden durch

$$s(P) = \frac{1}{V(P)} \int_P x \, dV(x), \tag{5}$$

wo x den in P variierenden Ortsvektor bezeichnet (wir unterscheiden hier nicht zwischen Punkten und ihren Ortsvektoren). Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar, dass die Abbildung s , die jedem Polyeder P seinen Schwerpunkt zuordnet, translationsäquivalent ist und dass das Funktional Vs einfach additiv ist. Die letztgenannte Eigenschaft können wir übrigens wegen der einfachen Additivität des Volumens auch in der Form

$$s(P \cup Q) = \frac{V(P)s(P) + V(Q)s(Q)}{V(P) + V(Q)} \quad (P, Q \in \mathfrak{P}, (P \cap Q)^\circ = \emptyset)$$

schreiben, wodurch es nahegelegt wird, dem Schwerpunktfunktional s die Eigenschaft der *einfachen Additivität mit Gewicht* V zuzusprechen. Eine weitere wichtige Eigenschaft des Funktionals s , die hier an die Stelle der dem Volumfunktional zukommenden Definitheit zu treten hat, lässt sich ebenfalls direkt an (5) ablesen: Ist $u \in E^n$ ein Vektor und $\alpha \in \mathbf{R}$ eine reelle Zahl derart, dass $\langle x, u \rangle \geqq \alpha$ für alle $x \in P$ erfüllt ist, so gilt auch $\langle s(P), u \rangle \geqq \alpha$; mit anderen Worten: jeder Halbraum, der das Polyeder P enthält, enthält auch seinen Schwerpunkt $s(P)$. Somit liegt $s(P)$ in der konvexen Hülle konv P des Polyeders P .

Wir wollen noch bemerken, dass man für Polyeder die Definition des Schwerpunktes und den Nachweis der oben angeführten formalen Eigenschaften auch unschwer ohne Zuhilfenahme des Integralbegriffs in elementarer Weise hätte bewerkstelligen können, indem man das von Hadwiger [1], S. 39–41, beim Existenznachweis für das Volumfunktional benutzte, nach der Dimension fortschreitende, induktive Vorgehen nachgeahmt hätte.

Als vektorielles Gegenstück zu Satz 1 haben wir nun den folgenden Kennzeichnungssatz:

Satz 2: Sei $f: \mathfrak{P} \rightarrow E^n$ ein Funktional mit den folgenden Eigenschaften:

$$f \text{ ist translationsäquivariant,} \quad (6)$$

$$f \text{ ist einfach additiv mit Gewicht } V, \quad (7)$$

$$f(P) \in \text{konv } P \text{ für alle } P \in \mathfrak{P}. \quad (8)$$

Dann ist $f = s$.

Beweis. Sei $n = 1$. Wir setzen $f(\overline{ab}) = g(a, b)$, wenn \overline{ab} die Strecke in $E^1 = \mathbf{R}$ mit den Endpunkten a und b ($a < b$) bezeichnet. Für g ergeben sich aus den Voraussetzungen die Funktionalgleichungen

$$g(a + c, b + c) = g(a, b) + c, \quad (a < b) \quad (9)$$

$$(a + b)g(0, a + b) = a g(0, a) + b g(a, a + b), \quad (a, b > 0). \quad (10)$$

Aus (9) und (10) zusammen folgert man

$$(a + b)g(0, a + b) = a g(0, a) + b g(0, b) + ab, \quad (a, b > 0).$$

Setzen wir $h(x) = x g(0, x) - (1/2)x^2$ für $x > 0$, so ergibt sich für h die Cauchysche Funktionalgleichung $h(a + b) = h(a) + h(b)$. Wegen der Voraussetzung (8), welche die lokale Beschränktheit der Funktion h nach sich zieht, folgt daraus bekanntlich $h(x) = \alpha x$ mit $\alpha = h(1)$, also $g(0, x) = 1/2x + \alpha$ für $x > 0$. Die Gleichung (9) liefert dann $g(a, b) = (1/2)(a + b) + \alpha$ für $a < b$, also $f(\overline{ab}) = s(\overline{ab}) + \alpha$. Wegen der Voraussetzung (8) kann nur $\alpha = 0$ sein. Damit ist die Behauptung für $n = 1$ bewiesen.

Sei nun $n > 1$ und die Behauptung bereits bewiesen für alle Dimensionen $< n$. Seien $E_p, E_q \subset E^n$ zwei orthogonale Unterräume der Dimension $p \geq 1$ bzw. $n - p = q \geq 1$. Sind $P \subset E_p$ und $Q \subset E_q$ eigentliche Polyeder in den jeweils angegebenen Trägerebenen, so ist die Minkowskische Summe $P + Q$ ein eigentliches Polyeder im E^n . Es gibt eine eindeutige Darstellung

$$f(P + Q) = f_1(P, Q) + f_2(P, Q)$$

mit $f_1(P, Q) \in E_p$ und $f_2(P, Q) \in E_q$. Bei festgehaltenem Q ist $f_1(\cdot, Q)$ ein Funktional, das jedem eigentlichen Polyeder P im E_p einen Punkt $f_1(P, Q)$ dieses Raumes zuordnet. Man bestätigt mühe los, dass $f_1(\cdot, Q)$ bezüglich E_p die gleichen Eigenschaften aufweist wie f bezüglich E^n (hierbei ist unter anderem die Beziehung $V(P + Q) = V_1(P) V_2(Q)$ zu benutzen, wo V_1 das p -dimensionale Volumen in E_p bezeichnet und

V_2 für E_q entsprechend erklärt ist). Nach Induktionsannahme ist $f_1(P, Q) = s_1(P)$, wenn s_1 den bezüglich E_p gebildeten Schwerpunkt bezeichnet. Analog ergibt sich $f_2(P, Q) = s_2(Q)$, insgesamt also $f(P + Q) = s_1(P) + s_2(Q) = s(P + Q)$; letztere Gleichheit ist sofort aus (5) durch sukzessive Integrationen herzuleiten. Wir haben also $f(Z) = s(Z)$ für alle geraden zweistufigen Zylinder $Z \in \mathfrak{P}$ gefunden. Setzen wir nun $v(P) = V(P) [f(P) - s(P)]$ für $P \in \mathfrak{P}$, so ist die dadurch erklärte Abbildung $v: \mathfrak{P} \rightarrow E^n$ translationsinvariant und einfach additiv, und auf geraden Zylindern verschwindet sie. Unter Benutzung der kanonischen Simplexzerlegung und der Orthogonalergänzung findet man wörtlich genauso wie in Hadwiger [1], S. 38 unten, dass $v(2^{-m}P) = 2^{-m}v(P)$ für alle $P \in \mathfrak{P}$ und alle natürlichen Zahlen m gilt. Nach Voraussetzung gilt $f(\lambda P) \in \text{konv } (\lambda P) = \lambda \text{ konv } P$ für $\lambda > 0$, und ebenso gilt $s(\lambda P) \in \lambda \text{ konv } P$. Also ist

$$\| f(\lambda P) - s(\lambda P) \| \leq \lambda \delta(P),$$

wenn $\delta(P)$ den Durchmesser von P bezeichnet. Wenn λ von der Form 2^{-m} ist, führt das zu der Abschätzung

$$\| v(P) \| = \lambda^{-1} \| v(\lambda P) \| = \lambda^{-1} V(\lambda P) \| f(\lambda P) - s(\lambda P) \| \leq \lambda^n V(P) \delta(P).$$

Da hier $\lambda > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, muss $v(P) = 0$ sein. Damit ist die Behauptung von Satz 2 für die Dimension n und daher allgemein bewiesen.

Bei der durch Satz 2 gegebenen Charakterisierung des Schwerpunktes wird der Volumbegriff als bereits bekannt unterstellt. Man kann aber auch Satz 1 und Satz 2 zu einer simultanen axiomatischen Einführung von Volumen und Schwerpunkt zusammenfassen:

Satz 3: Seien $\varphi: \mathfrak{P} \rightarrow \mathbf{R}$ und $f: \mathfrak{P} \rightarrow E^n$ zwei Funktionale mit den folgenden Eigenschaften:

$$\varphi \text{ ist translationsinvariant und normiert,} \quad (11)$$

$$f \text{ ist translationsäquivariant, und es gilt } f(P) \in \text{konv } P, \quad (12)$$

$$\varphi f \text{ ist einfach additiv.} \quad (13)$$

Dann ist $\varphi = V$ und $f = s$.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus den Sätzen 1 und 2, sobald gezeigt ist, dass φ notwendigerweise einfach additiv und definit ist. Seien $P, Q \in \mathfrak{P}$ Polyeder mit $(P \cap Q)^\circ = \emptyset$, und sei $t \in E^n$, $t \neq 0$. Nimmt man (13) in Anspruch, zunächst für die Argumente $P + t$ und $Q + t$ und sodann für P und Q , so sieht man bei Beachtung der Invarianz von φ und der Äquivalenz von f , dass φ einfach additiv ist. Sei nun W ein Würfel mit $\varphi(W) = 1$. Angenommen, es existiert ein Polyeder $U \in \mathfrak{P}$ mit $\varphi(U) < 0$. Wegen (11) können wir $W \cap U = \emptyset$ annehmen und ferner voraussetzen, dass W und U in dem Halbraum $H^+ = \{x \in E^n \mid \langle x, t \rangle > 0\}$ liegen. Für hinreichend grosse $\lambda \in \mathbf{R}$ ist dann $(U + \lambda t) \cap W = \emptyset$, also gilt

$$\varphi((U + \lambda t) \cup W) = \varphi(U + \lambda t) + \varphi(W) = \varphi(U) + \varphi(W) = \varphi(U \cup W)$$

und daher

$$\begin{aligned}\varphi(U \cup W) f((U + \lambda t) \cup W) &= \varphi(U) f(U) + \varphi(W) f(W) \\ &= \varphi(U \cup W) f(U \cup W) + \lambda \varphi(U) t \\ &\notin H^+\end{aligned}$$

für alle grossen λ . Wegen

$$f((U + \lambda t) \cup W) \in \text{konv}((U + \lambda t) \cup W) \subset H^+$$

muss also $\varphi(U \cup W) < 0$ sein. Andererseits gilt für hinreichend grosse λ

$$\varphi(U \cup W) f(U \cup (W + \lambda t)) = \varphi(U \cup W) f(U \cup W) + \lambda t \in H^+$$

und

$$f(U \cup (W + \lambda t)) \in \text{konv}(U \cup (W + \lambda t)) \subset H^+,$$

was $\varphi(U \cup W) > 0$ nach sich zieht. Die Annahme war also falsch, das heisst φ ist definit.

Rolf Schneider, TU Berlin

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie* (Springer-Verlag, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1957).
- [2] H. HADWIGER und R. SCHNEIDER, *Vektorielle Integralgeometrie*, El. Math. 26, 49–57 (1971).
- [3] R. SCHNEIDER, *On Steiner Points of Convex Bodies*, Israel J. Math. 9, 241–249 (1971).
- [4] R. SCHNEIDER, *Krümmungsschwerpunkte konvexer Körper (I), (II)*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 37, 112–132, 204–217 (1972)

Two Non-Negative Quadratic Forms

I. Introduction

In problem E 2348 [1], L. Carlitz has given the inequality

$$\sum R_1(r_2 + r_3) \geq \sum (r_1 + r_2)(r_1 + r_3) \quad (1)$$

where R_1, R_2, R_3 and r_1, r_2, r_3 denote the distances from an interior point of a triangle ABC to the vertices A, B, C and the sides a, b, c , respectively. Coupling (1) with the known lower bounds $R_1 \geq (r_2 c + r_3 b)/a$, etc. [2, p. 107], suggests the stronger inequality

$$\left. \begin{aligned} F_1 &\equiv \left\{ \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 1 \right\} r_1^2 + \left\{ \frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 1 \right\} r_2^2 + \left\{ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1 \right\} r_3^2 \\ &- \left\{ 3 - \frac{b+c}{a} \right\} r_2 r_3 - \left\{ 3 - \frac{c+a}{b} \right\} r_3 r_1 - \left\{ 3 - \frac{a+b}{c} \right\} r_1 r_2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$