

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 28 (1973)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Überdeckung der Ebene durch inkongruente Kreise  
**Autor:** Dorninger, D.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-29457>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 28

Heft 5

Seiten 105–136

10. September 1973

## Überdeckung der Ebene durch inkongruente Kreise

(Eine Bemerkung zu einer Arbeit von Fejes Tóth und Molnár)

Fejes Tóth und Molnár schätzten in [2] die Dichte eines die Euklidische Ebene vollständig überdeckenden Systems von Kreisen, deren Radien  $r_i$  beliebig aus einem Intervall  $(a, b)$  der reellen Achse sind, nach unten ab und vermuteten eine explizite Darstellung ihrer Abschätzung, welche von A. Florian für den Fall, dass die Radien  $r_i$  von nur zweierlei Grössen sind, bestätigt wurde. (vgl. [3]).

Im folgenden wird gezeigt, dass man aus der in [2] angegebenen Abschätzung die explizite Darstellung einer unteren Schranke für die Überdeckungsdichte eines die Ebene bedeckenden Kreissystems gewinnen kann, bei dem abgesehen von  $\inf r_i > 0$  und  $\sup r_i < \infty$  keinerlei Voraussetzungen über die Grösse der Kreisradien  $r_i$  gemacht werden, bei dem aber die Lage der Kreise zueinander einer Beschränkung unterworfen wird: In jedem Dreieck, welches durch die Mittelpunkte dreier Kreise, die mindestens einen Punkt gemeinsam haben, aufgespannt wird, sei kein Winkel kleiner als ein Winkel  $\omega$  ( $0 < \omega \leq \pi/3$ ).

Wir werden beweisen, dass für die Dichte  $D(\omega)$  eines solchen – kurz  $\omega$ -Überdeckung genannten – Kreissystems gilt:

$$D(\omega) \geq \frac{\omega (\pi - 2\omega)}{\pi} \operatorname{tg} \omega + \omega \operatorname{cotg} \omega \quad (1)$$

und dass für  $\omega = \pi/6$ ,  $\omega = \pi/4$  und  $\omega = \pi/3$  die angegebene Schranke scharf ist. Gleichheit tritt jeweils dann ein, wenn die Kreisradien von höchstens zweierlei Grössen sind und sich immer zwei «grosse» und ein «kleiner» Kreis in symmetrischer Lage zueinander befinden.

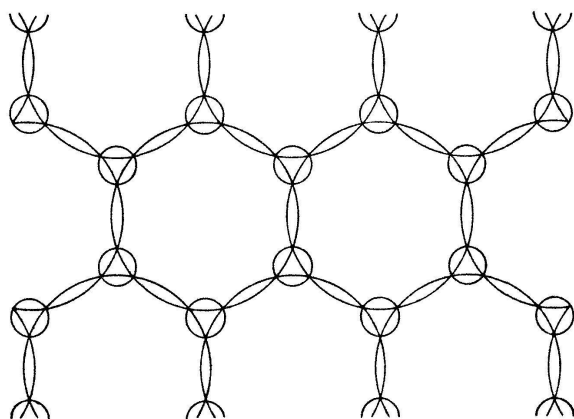


Fig. 1

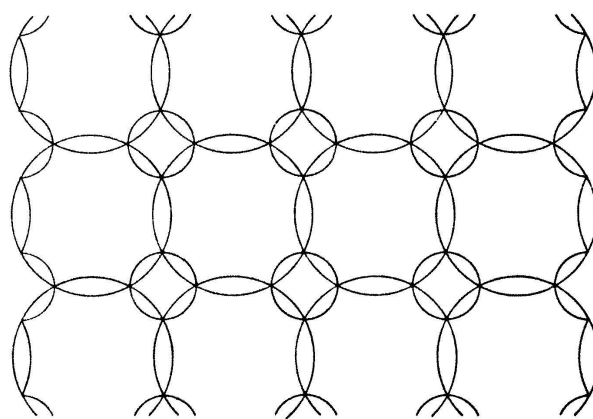


Fig. 2

Zum *Beweis* modifizieren wir zunächst die in [2] angegebene Schranke  $S(h)$  wie folgt: Die (wie sich zeigen wird, nur von  $\omega$  abhängige) Funktion  $S(\omega)$  sei das Minimum der Dichten dreier Kreise in dem durch ihre Mittelpunkte aufgespannten Dreieck, erstreckt über alle Tripeln von Kreisen mit beschränktem Radius und der Eigenschaft, dass die drei Kreise einen gemeinsamen Randpunkt, aber keinen gemeinsamen inneren Punkt haben und dass in dem durch ihre Mittelpunkte aufgespannten Dreieck kein Winkel kleiner als  $\omega$  auftritt. An Hand des von Fejes Tóth und Molnár in [2] gegebenen Beweises für die Abschätzung  $D(h) \geq S(h)$  kann man sich nun unschwer überlegen, dass  $D(\omega) \geq S(\omega)$  ist. Man braucht bloss zu beachten, dass die Dichte dreier Kreise in einem Dreieck bei festgehaltenem Dreieck sicherlich abnimmt, wenn man die Radien von einem der drei Kreise derart verkleinert, dass die drei Kreise einen gemeinsamen Rand-, aber keinen gemeinsamen inneren Punkt haben und dass die Kreisradien in einer  $\omega$ -Überdeckung beschränkt sind.

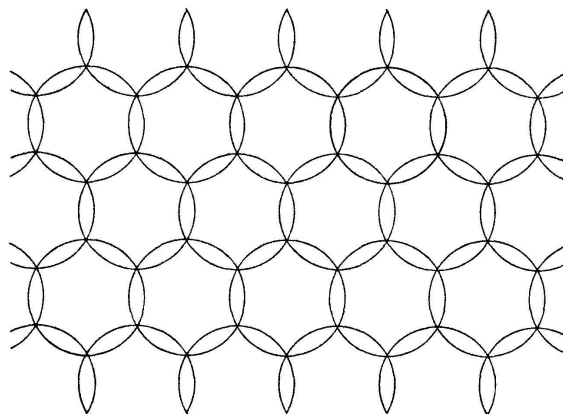


Fig. 3

Um nun  $S(\omega)$  explizit zu bestimmen, betrachten wir die Dichte  $\delta$  dreier Kreise mit dem Radien  $r_1, r_2$  und  $r_3$ , welche einen gemeinsamen Randpunkt  $X$ , aber keinen gemeinsamen inneren Punkt haben, in dem durch ihre Mittelpunkte  $O_1, O_2$  und  $O_3$  aufgespannten Dreieck  $\Delta$  mit den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . *O. B. d. A.* sei  $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ , und die Länge der Dreiecksseite  $O_1 O_3$  sei 1. Legen wir nun etwa das Dreieck  $\Delta$  derart in ein rechtwinkeliges kartesisches Koordinatensystem, dass die Seite  $O_1 O_2$  auf die Abszisse zu liegen kommt, und halten wir die Punkte  $O_1, O_2$  und  $O_3$  fest und variieren den Punkt  $X$ , so sieht man sofort ein, dass die Dichte  $\delta$  am kleinsten ist, wenn für die Koordinaten  $x, y$  von  $X$  gilt

$$x = \frac{1}{\pi} \left( \beta \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} + \gamma \cos \alpha \right), \quad y = \frac{\gamma}{\pi} \sin \alpha. \quad (2)$$

Wählt man nun die Koordinaten von  $X$  gemäss (2), drückt  $r_1, r_2, r_3$  und die Fläche von  $\Delta$  als Funktionen der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  aus und setzt in den Quotienten für die Dichte  $\delta$  ein, so kann man nach einer etwas mühsamen Rechnung für den minimalen Wert  $\delta_1(\alpha, \beta)$  von  $\delta$  den folgenden Ausdruck erhalten:

$$\delta_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \left. \begin{aligned} &(\alpha (\pi - \alpha) \cotg \alpha + \beta (\pi - \beta) \cotg \beta \\ &- (\alpha + \beta) (\pi - \alpha - \beta) \cotg(\alpha + \beta). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Nun halten wir  $\alpha$  fest und zeigen, dass  $\delta_1(\alpha, \beta)$  eine zunehmende Funktion von  $\beta$  ist:

Sei  $f(x) = x(\pi - x) \cotg x$ . Gemäss (3) ist dann  $\delta_1(\alpha, \beta) = \pi^{-1} (f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma))$  und daher  $\partial\delta_1/\partial\beta = \pi^{-1} (f'(\beta) - f'(\gamma))$ . ( $-f'$ : Ableitung von  $f$  nach  $x$ ). Da  $f''(x) = \dots = 2(\cotg x) h(x)$  mit

$$h(x) = \frac{x}{\sin x} \frac{\pi - x}{\sin(\pi - x)} - 2 \frac{\pi - 2x}{\sin(\pi - 2x)} - 1$$

und, wie man sich leicht überzeugt, die Funktion  $h(x)$  im Intervall  $0 \leq x \leq \pi/2$  negativ ist, ist  $f'(x)$  für  $0 \leq x \leq \pi/2$  eine abnehmende Funktion von  $x$ . Da ferner wegen  $f(x) = -f(\pi - x)$  gilt  $f'(x) = f'(\pi - x)$ , erhalten wir, falls  $\gamma \leq \pi/2$  ist:

$$\frac{\partial\delta_1}{\partial\beta} = \frac{1}{\pi} (f'(\beta) - f'(\gamma)) \geq \frac{1}{\pi} (f'(\gamma) - f'(\gamma)) = 0,$$

und falls  $\gamma \geq \pi/2$  und daher  $\alpha + \beta \leq \pi/2$  ist:

$$\frac{\partial\delta_1}{\partial\beta} = \frac{1}{\pi} (f'(\beta) - f'(\pi - \gamma)) \geq \frac{1}{\pi} (f'(\alpha + \beta) - f'(\alpha + \beta)) = 0.$$

Also ist  $\partial\delta_1/\partial\beta$  in jedem Fall  $\geq 0$ .

Nun überlegen wir uns noch, dass die Funktion  $\delta_2(\alpha) := \delta_1(\alpha, \alpha)$  eine zunehmende Funktion von  $\alpha$  ist, woraus dann die Ungleichung (1) folgt.

Gemäss (3) ist  $\delta_2(\alpha) = \pi^{-1} (2f(\alpha) + f(\pi - 2\alpha))$ . Daher gilt:

$$\frac{d\delta_2}{d\alpha} = \frac{2}{\pi} (f'(\alpha) - f'(\pi - 2\alpha)).$$

Wie oben aber sieht man, dass  $f'(\alpha) - f'(\pi - 2\alpha) \geq 0$  und daher  $d\delta_2/d\alpha \geq 0$  ist.

Abschliessend geben wir für  $\omega = \pi/6$ ,  $\omega = \pi/4$  und  $\omega = \pi/3$   $\omega$ -Überdeckungen an, für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt. (Siehe Fig. 1, 2 und 3).

Dazu beachten wir, dass in jenem Fall, in dem die Dichte  $\delta$  den minimalen Wert  $\delta_2(\alpha)$  annimmt, gilt:  $r_1 = r_2 \geq r_3$ , und zerlegen sodann für  $\omega = \pi/6$ ,  $\pi/4$  und  $\pi/3$  die Euklidische Ebene jeweils derart in ein Mosaik  $M$  aus kongruenten, gleichschenkeligen Dreiecken  $\Delta$  mit den Basiswinkeln  $\omega$ , so dass in jedem Eckpunkt von  $M$  entweder nur Spitzen oder Basisecken zusammenstossen. Legen wir nun in jedem Dreieck  $\Delta$  um die Basisecken zwei Kreise mit den Radien  $r_1$  und um die Spitze einen Kreis mit dem Radius  $r_3$ , wobei wir  $r_1$  und  $r_3$  derart bestimmen, dass für die Dichte der drei Kreise in  $\Delta$  gilt:  $\delta = \delta_2(\omega)$ , so erhalten wir sichtlich eine  $\omega$ -Überdeckung, für die  $D(\omega) = S(\omega)$  ist. (Vgl. hierzu [4], S. 399).

D. Dorninger, TH Wien

#### LITERATUR

- [1] L. FEJES TÓTH, *Reguläre Figuren*, Verlag der Ung. Akad. der Wissenschaften (Budapest 1965).
- [2] L. FEJES TÓTH und J. MOLNÁR, *Unterdeckung und Überdeckung der Ebene durch Kreise*, Math. Nachr. 18, 235–243 (1958).
- [3] A. FLORIAN, *Überdeckung der Ebene durch Kreise*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 31, 77–86 (1961).
- [4] A. FLORIAN, *Zum Problem der dünnsten Kreisüberdeckung der Ebene*, Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 13, 397–400 (1962).