Intervallarithmetik : mit Zirkel und Lineal

Autor(en): **Ratschek, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 4

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-29456

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Intervallarithmetik – mit Zirkel und Lineal

1. Einleitung

Intervallarithmetik ist eine Disziplin, die sich mit der Verknüpfung von Intervallen befasst und deren Ziel es ist, wirksame Hilfsmittel für die Fehlereinschliessung bei numerischen Rechnungen bereitzustellen.

Bei üblicher numerischer Ausführung von Rechnungen werden die in diesen auftretenden (exakten) Werte x meist durch Näherungswerte $\tilde{x}$ approximiert, über deren Genauigkeit dann oft nur vage Aussagen möglich sind (z.B. durch Rundungsfehlereinflüsse). Hingegen wird bei intervallarithmetischer Durchführung der Rechnung jeder exakte Wert x nicht durch den Näherungswert $\tilde{x}$, sondern durch ein Intervall X derart beschrieben, dass $x \in X$ ist. Nach beendeter Rechnung liegt somit ein Intervall vor, in dem das exakte Ergebnis liegen muss, und man ist auf diese Weise im Besitze von Schranken für das exakte Ergebnis; man vgl. etwa [1, 2, 3].

Um dieses Konzept geeignet zu erfüllen, sind Grundrechenoperationen für Intervalle A, B so definiert (man vgl. 2.1), dass aus

$$a \in A, \quad b \in B \quad \text{die Beziehung} \quad a * b \in A * B$$

folgt und die Länge des Intervalls $A * B$ möglichst klein ist ("$*$" steht stellvertretend für je eine der vier Grundrechenoperationen).

In der vorliegenden Notiz geben wir ein Konstruktionsverfahren an, das es ermöglicht, die verhältnismässig komplizierten Verknüpfungen Multiplikation und Division der Intervallarithmetik, man vgl. 2.1, «mit Zirkel und Lineal» auszuführen. Hierbei legen wir eine auf MOORE [3] zurückgehende Darstellung von Intervallen in der euklidischen Ebene zugrunde, man vgl. 2.2. Unter Benutzung dieser Darstellung kann die graphische Durchführung der Intervalladdition und -subtraktion in elementarer Weise auf die Vektoraddition zurückgeführt werden, so dass auf die Erörterung dieser beiden Verknüpfungen verzichtet wird.

Die hier vorgestellte Methode der graphischen Intervallmultiplikation und -division basiert auf einer in [4] eingeführten «kanonischen Zerlegung» von Intervallen, man vgl. 2.3. Diese Zerlegung entspricht der Charakterisierung eines Intervalles durch gewisse mit den Verknüpfungen verträgliche Parameter, die die Lage des Intervalles in der Ebene festlegen, man vgl. 3.1. Hierdurch ist es möglich, die Multiplikation und die Division von Intervallen durch einfache Schemata zu beschreiben.

2. Einige Begriffe der Intervallarithmetik

2.1. Die Intervallarithmetik befasst sich i. a. mit *reellen kompakten* Intervallen, die wir kurz *Intervalle* nennen. Für Intervalle sind die Verknüpfungen *Addition*, *Subtraktion*, *Multiplikation* und *Division* wie folgt erklärt, man vgl. etwa [1]:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d], \quad [a, b] - [c, d] = [a - d, b - c],$$

$$[a, b]\,[c, d] = [\min(a\,c, a\,d, b\,c, b\,d), \quad \max(a\,c, a\,d, b\,c, b\,d)],$$

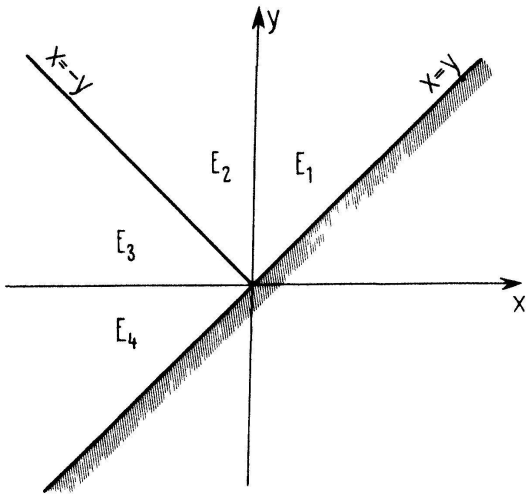
$$[a, b] : [c, d] = [a, b]\,[1/d, 1/c] \quad \text{für} \quad 0 \notin [c, d].$$

Anstelle von $[a, a]\,[b, c]$ schreibt man auch $a\,[b, c]$.

2.2. MOORE benützt die folgende graphische Darstellung von Intervallen: Jedem Intervall $[x, y]$ wird der Punkt $(x, y) \in R^2$ (R sei die Menge der reellen Zahlen) zugeordnet. Umgekehrt entspricht jedem Punkt (x, y) mit $x \leqq y$ das Intervall $[x, y]$. Man beachte, dass die Halbebene, die aus den Punkten (x, y) mit $x > y$ besteht, irrelevant ist. Zur einfachen Beschreibung unterteilen wir die für uns wesentliche Halbebene, für die $x \leqq y$ charakteristisch ist, in 4 disjunkte Teile. Hierbei und bei den weiteren Betrachtungen wird der Punkt $(0, 0)$ bzw. das Intervall $\underset{\cdot}{0} := [0, 0]$ ausgeschlossen:

$$E_1 := \{(x, y): 0 < x \leqq y\}, \qquad E_2 := \{(x, y): 0 \leqq -x \leqq y \neq 0\},$$

$$E_3 := \{(x, y): 0 \leqq y < -x\}, \quad E_4 := \{(x, y): x \leqq y < 0\}.$$



Figur 1

2.3. Sei $\mathrm{I}'(R)$ die Menge der von $\underset{\cdot}{0}$ verschiedenen Intervalle und R^+ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Die Funktionen σ': $\mathrm{I}'(R) \to \{-1, 1\}$, ψ: $\mathrm{I}'(R) \to R^+$, χ: $\mathrm{I}'(R) \to [-1, 1]$ und die binäre Operation «$\ominus$» auf R sind wie folgt erklärt:

Für $\mathrm{A} = [a, b] \in \mathrm{I}'(R)$ und für $u, v \in R$ sei $\sigma' A = 1$, wenn $a + b \geqq 0$, $\sigma' A = -1$ andernfalls; $\psi A = \max(|a|, |b|)$; $\chi A = a/b$, wenn $|a| \leqq |b|$, $\chi A = b/a$ andernfalls; $u \ominus v = u\,v$, wenn $u, v \in R^+$, $u \ominus v = \min(u, v)$ andernfalls.

Eine kanonische Zerlegung von Intervallen $A \neq \underset{\cdot}{0}$ ist durch

$$A = (\sigma' A)\,(\psi A)\,[\chi A, 1]$$

gegeben. Zwei Intervalle $A, B \in I'(R)$ sind genau dann gleich, wenn $\psi A = \psi B$, $\chi A = \chi B$ und $\sigma' A = \sigma' B$ ist. Die Wahl von Bildwerten $\sigma' A$, ψA und χA zur Angabe eines Intervalls A kann unabhängig voneinander erfolgen, ausgenommen hiervon ist jedoch die für alle $A \in I'(R)$ gültige Implikation

$$\chi A = -1 \to \sigma' A = 1. \tag{1}$$

Für Intervalle $A, B \in I'(R)$ ist demnach

$$A\,B = \sigma'(AB)\,\psi(AB)\,[\chi(AB), 1]$$

und

$$A : B = \sigma'(A : B)\,\varphi(A : B)\,[\chi(A : B), 1] \quad \text{für} \quad 0 \notin B.$$

Für σ', ψ und χ gelten die Beziehungen (für Einzelheiten muss auf [4, 5] verwiesen werden)

$$\psi(A\ B) = (\psi\ A)\ (\psi\ B),\quad \psi(A:B) = \frac{(\psi\ A)}{(\psi\ B)\ (\chi\ B)} \quad \text{für} \quad 0 \notin B,$$

$$\chi(A\ B) = \chi\ A \ominus \chi\ B,\quad \chi(A:B) = \chi(A\ B) \quad \text{für} \quad 0 \notin B,$$

$$\sigma'(A\ B) = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad \chi(A\ B) = -1, \\ (\sigma'\ A)\ (\sigma'\ B) & \text{andernfalls,} \end{cases} \quad \sigma'(A:B) = \sigma'(A\ B) \quad \text{für} \quad 0 \notin B.$$

3. Beschreibung des Konstruktionsverfahrens

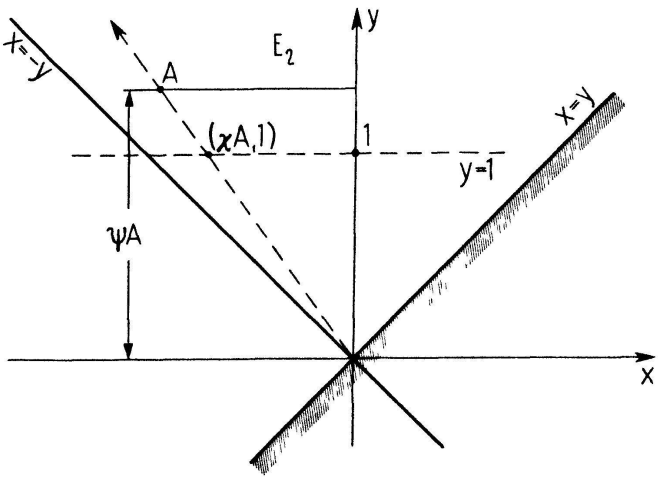
3.1. Das Prinzip des Konstruktionsverfahrens beruht darauf, dass jedes Intervall $A \in I'\ (R)$ auf graphischem Wege in seine Komponenten $\sigma'\ A$, $\psi\ A$ und $\chi\ A$, die A eindeutig bestimmen und die durch A eindeutig bestimmt sind, zerlegt werden kann. Umgekehrt kann die Lage von A in der euklidischen Ebene durch Angabe der drei Komponenten [wobei nur (1) zu beachten ist] konstruiert werden:

Der Wert $\sigma'\ A$ entscheidet, ob A in $E_1 \cup E_2$ oder in $E_3 \cup E_4$ liegt ($A \in E_1 \cup E_2 \leftrightarrow \sigma'\ A = 1$; $A \in E_3 \cup E_4 \leftrightarrow \sigma'\ A = -1$).

$\psi\ A$ gibt den Abstand des Punktes A von der x-Achse an, wenn $\sigma'\ A = 1$ ist, bzw. von der y-Achse, wenn $\sigma'\ A = -1$ ist.

$\chi\ A$ gibt die Richtung an, auf der A liegt; d. h.: A liegt auf einem der beiden Halbstrahlen, die von (0, 0) durch die Punkte $(\chi\ A, 1)$ und $(-1, -\chi\ A)$ führen.

Bei Vorgabe von A ist für $\sigma'\ A = 1$ der Punkt $(\chi\ A, 1)$ und somit $\chi\ A$ gegeben durch den Schnittpunkt der Geraden $y = 1$ mit dem von (0, 0) ausgehenden und durch A führenden Halbstrahl. Für $\sigma'\ A = -1$ ist $(-1, -\chi\ A)$ und somit $\chi\ A$ gegeben durch den Schnittpunkt der Geraden $x = -1$ mit dem von (0, 0) ausgehenden und durch A führenden Halbstrahl. Siehe Figur 2.



Figur 2

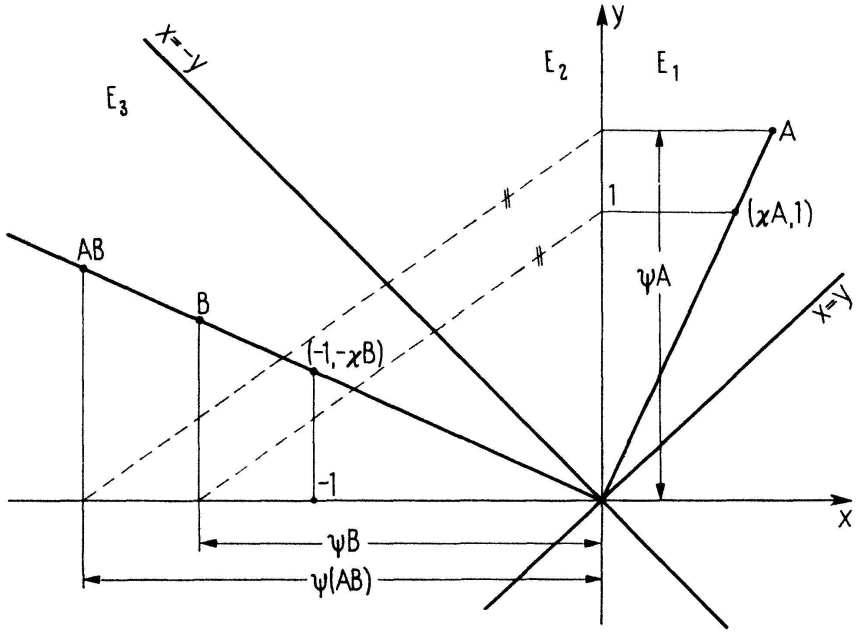
3.2. *Konstruktion von AB für Intervalle $A, B \in I'\ (R)$.* Mit A und B stehen nach 3.1 die Werte $\sigma'\ A$, $\sigma'\ B$ und die reellen Zahlen $\psi\ A$, $\psi\ B$, $\chi\ A$, $\chi\ B$ zur Verfügung.

a) Liegt A oder B auf der Geraden $x = -y$, so ist $\sigma'\ (AB) = 1$, andernfalls ist $\sigma'\ (AB) = (\sigma'\ A)\ (\sigma'\ B)$, man vgl. 2.3. Somit ist nach 3.1 geklärt, ob AB in $E_1 \cup E_2$ oder in $E_3 \cup E_4$ liegt.

b) Der Abstand von AB zur x-Achse bzw. zur y-Achse, man vgl. 3.1, ist durch $\psi\,(AB) = (\psi\,A)\,(\psi\,B)$ gegeben [2 reelle Zahlen können mit Zirkel und Lineal multipliziert werden, z. B. mit Hilfe des Strahlensatzes der Elementargeometrie].

c) Konstruktion der Zahl $\chi\,(AB)$: Ist sowohl A als auch B aus $E_1 \cup E_4$, dann ist $\chi\,(AB) = (\chi\,A)\,(\chi\,B)$, andernfalls ist $\chi\,(AB) = \min\,(\chi\,A, \chi\,B)$, man vgl. 2.3. Hiermit ist die Angabe der Punkte $(\chi\,(AB), 1)$ und $(-1, -\chi\,(AB))$ möglich, man vgl. 3.1.

d) Zusammenfassung: Von $(0, 0)$ aus ziehen wir durch den Punkt $(\chi\,(AB), 1)$, wenn $\sigma'\,(AB) = 1$ ist, bzw. durch $(-1, -\chi\,(AB))$, wenn $\sigma'\,(AB) = -1$ ist, einen Halbstrahl. Jener Punkt des Halbstrahls, der von der x-Achse im Falle $\sigma'\,(AB) = 1$ bzw. von der y-Achse im Falle $\sigma'\,(AB) = -1$ den Abstand $\psi\,(AB)$ hat, entspricht dem Intervall AB. Siehe Figur 3.



$\sigma' A = 1, \quad \sigma' B = -1,$

$\sigma'(A\,B) = -1,$

$$\frac{\psi\,B}{\psi\,(A\,B)} = \frac{1}{\psi\,A},$$

$\chi(A\,B) = \chi\,B$

Figur 3

3.3. *Konstruktion von $A:B$ für Intervalle $A, B \in I'\,(R)$ mit $0 \notin B$.* Absatz a), c), d) wie in 3.2, doch ist anstelle aller dort vorkommenden Ausdrücke AB jetzt $A:B$ zu setzen.

b) Der Abstand von $A:B$ zur x-Achse bzw. zur y-Achse, man vgl. 3.1, ist durch $\psi\,(A:B) = (\psi\,A)/((\psi\,B)\,(\chi\,B))$ gegeben. [Auch die Division von reellen Zahlen kann mittels des Strahlensatzes graphisch ausgeführt werden.]

H. Ratschek, Universität Düsseldorf

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. Apostolatos und U. Kulisch, *Grundlagen einer Maschinenintervallarithmetik*, Computing *2*, 89–104 (1967).
[2] F. Krückeberg, *Numerische Intervallrechnung und deren Anwendung* (Bonn 1966).
[3] R. E. Moore, *Interval Analyis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1966).
[4] H. Ratschek, *Die binären Systeme der Intervallarithmetik*, Computing *6*, 295–308 (1970).
[5] H. Ratschek, *Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik*, J. reine angew. Math. *252*, 128–138 (1972).