

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 28 (1973)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen  
**Autor:** Wills, J.M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-29451>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 28

Heft 3

Seiten 57-80

10. Mai 1973

## Zur Gitterpunktanzahl konvexer Mengen

### 1. Einleitung

Die Anzahl der Gitterpunkte in speziellen konvexen Mengen spielt in der Zahlentheorie eine grosse Rolle. In der Geometrie der Zahlen beschränkt man sich auf zentralsymmetrische konvexe Mengen, in der additiven analytischen Zahlentheorie vor allem auf Kugeln bzw. Ellipsoide um den Nullpunkt. Die dort benutzten, oft tiefliegenden Methoden und Ergebnisse erlauben aber nur zum kleinen Teil eine Übertragung auf beliebige konvexe Mengen.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, Schranken für die Gitterpunktanzahl beliebiger konvexer Mengen zu finden (Es werden nur Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten betrachtet). Dazu wird zuerst gezeigt, dass gewisse einfache Klassen von Ungleichungen nicht möglich sind. Dann werden mit einer einfachen und allgemeinen Methode einige einfache Ungleichungen für die Gitterpunktanzahl aufgestellt. Bei den interessanteren Ungleichungen wird ausserdem untersucht, inwieweit sie verbessert werden können. Vor den eigentlichen Ergebnissen werden die benötigten Definitionen und bisher bekannte Sätze zusammengestellt.

### 2. Definitionen

$\mathfrak{R}^n$  sei die Menge der beschränkten konvexen Mengen des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $R^n$  ( $n \geq 1$ ). Zu einem  $K \in \mathfrak{R}^n$  sei  $\bar{K}$  der zugehörige konvexe Körper. Ein stetiges Funktional  $f = f(K)$  sei durch  $f(K) = f(\bar{K})$  definiert (Diese Konvention ist unwesentlich, erweist sich aber als recht praktisch). Zu einem  $K \in \mathfrak{R}^n$  sei  $V = V(K)$  sein Volumen,  $F = F(K)$  seine Oberfläche,  $R = R(K)$  bzw.  $r = r(K)$  sein Um- bzw. Inkugelradius,  $D = D(K)$  sein Durchmesser,  $d = d(K)$  seine Dicke,  $W_\nu = W_\nu(K)$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n$  seine Minkowskischen Quermassintegrale (also  $W_0 = V$ ,  $nW_1 = F$ ) und  $G = G(K)$  die Anzahl der Gitterpunkte aus  $K$ .  $G$  ist im Gegensatz zu den anderen Funktionalen weder stetig noch bewegungsinvariant noch homogen. Für alle hier definierten Funktionale  $f$  ausser  $G$  gilt also  $f(K) = f(\bar{K})$ .

Wie üblich sei  $\alpha_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel. Es ist  $\alpha_n = \pi^{n/2} / \Gamma(n/2 + 1)$ , insbesondere  $\alpha_1 = 2$ . Man setzt noch  $\alpha_0 = 1$ . Für  $\varrho > 0$  sei  $K_\varrho$  die äussere Parallelmenge, für  $-\varrho \leq \varrho < 0$  die innere Parallelmenge, und  $K_\varrho = \emptyset$  für  $\varrho < -r$ .

(Zu allen Definitionen vgl. [1], [4] oder [5]).

### 3. Bekannte Sätze

Das bekannteste Ergebnis ist Minkowskis Fundamentalsatz aus der Geometrie der Zahlen (s.z.B. [1]):

$K \in \mathfrak{R}^n$  kompakt, zentralsymmetrisch und  $V \geq 2^n \Rightarrow G \geq 3$ .

Krupizka [8] zeigt für  $K \in \mathfrak{R}^n$  mit  $0 \in K$ , dessen Rand kein Geradenstück enthält und gewisse weitere Krümmungseigenschaften aufweist:

$$G(\lambda K) = V(\lambda K) + O(\lambda^{n-2n/(n+1)}) \quad (\text{für } \lambda \rightarrow \infty).$$

Beschränkt man sich hier auf Kugeln um den Nullpunkt, so hat man Verallgemeinerungen des klassischen Gaußschen Kreisproblems der additiven Zahlentheorie. Man erhält dann etwas bessere Ergebnisse als Krupizka: Für  $n = 2$ :  $O(\lambda^{15/23})$ , für  $n = 3$ :  $O(\lambda^{11/8})$ , für  $n = 4$ :  $O(\lambda^2 \log \lambda)$ , für  $n > 4$ :  $O(\lambda^{n-2})$ , (s. dazu [7]).

Wie schon das Beispiel des Würfels  $W = \{(x_1, \dots, x_n) / |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$  zeigt, gilt der Satz von Krupizka nicht für beliebige  $K$ . Denn sei  $\lambda = q$  ganz. Dann ist  $G(qW) = (2q + 1)^n$ ,  $V(qW) = (2q)^n$ , also  $G(qW) = V(qW) + O(q^{n-1})$ .

Für gitterpunktfreie konvexe Mengen zeigt Hadwiger [6]:  $K \in \mathfrak{R}^n$  mit inneren Punkten und  $G = 0 \Rightarrow V < F/2$ .

Speziell für den  $R^2$  gibt es mehrere Ergebnisse: Nosarzewska [9] zeigt:  $K \in \mathfrak{R}^2$  mit inneren Punkten:  $-(F/2 + 1) < V - G < F/2$ . (Für allgemeinere, nur durch eine rektifizierbare Jordankurve begrenzte ebene Bereiche gilt nach Warmus [12] sogar:  $|V - G + 1| \leq cF$  mit  $c \approx 0,58$ , wenn nur  $F > \pi$  ist).

Für ebene gitterpunktfreie konvexe Mengen bei beliebigen Gittern beweist Groemer [3] eine Ungleichung zwischen Affinumfang und Gitterdeterminante.

Zum Schluss sei noch Reeve [10, 11] zitiert, der für die konvexe Hülle  $H$  von Gitterpunkten im  $R^3$  und  $R^4$  Ungleichungen zwischen  $V(H)$ , der Anzahl der Gitterpunkte aus dem Innern von  $H$  und der Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rand von  $H$  aufstellt.

### 4. Ergebnisse

Da alle vorkommenden Ungleichungen noch ziemlich grob sind, wird auf eine Untersuchung, wann  $<$  und wann  $\leq$  gilt, verzichtet. Satz 1 beantwortet die Frage nach der Existenz von Ungleichungen zwischen  $G$  und einem einzigen Funktional  $f$ . Sie sind vom Typ  $G \leq \varphi(f)$  oder  $\psi(f) \leq G$ , wobei  $\varphi$  bzw.  $\psi$  irgendeine für  $0 \leq f < \infty$  definierte reellwertige Funktion ist. Eine Ungleichung  $\psi(f) \leq G$  mit  $\psi(f) \leq 0$  für  $0 \leq f < \infty$  heisst trivial.

#### Satz 1

a) Es gibt keine Ungleichungen vom Typ

$$G \leq \varphi(r), \quad G \leq \varphi(d), \quad G \leq \varphi(W_v) \quad v = 0, 1, \dots, n-2, n$$

und keine nichttriviale vom Typ

$$\psi(R) \leq G, \quad \psi(D) \leq G, \quad \psi(W_\nu) \leq G \quad \nu = 0, 1, \dots, n$$

b) Es gibt nichttriviale Ungleichungen vom Typ

$$G \leq \varphi(R), \quad G \leq \varphi(D), \quad G \leq \varphi(W_{n-1})$$

$$\psi(r) \leq G, \quad \psi(d) \leq G.$$

Bemerkung: Satz 2 bringt 3 der 5 möglichen Typen, die allerdings keineswegs bestmöglich sind.

### Satz 2

Sei  $K \in \mathfrak{R}^n$ . Dann gilt

$$2n \left( \frac{F}{V} - 1 \right) \leq G \leq (D+1)^n \quad (1)$$

$$\psi(r) \leq G \leq \alpha_n \left( R + \frac{\sqrt{n}}{2} \right)^n \text{ mit } \psi(r) = \begin{cases} \alpha_n \left( r - \frac{\sqrt{n}}{2} \right)^n & \text{für } r \geq \frac{\sqrt{n}}{2} \\ 0 & \text{für } r < \frac{\sqrt{n}}{2} \end{cases} \quad (2)$$

Ist  $K \in \mathfrak{R}^n$  eigentlich (d. h.  $r > 0$ ), so gilt ausserdem

$$\psi(r, V) \leq G \leq V \left( 1 + \frac{\sqrt{n}}{2r} \right)^n \text{ mit } \psi(r, V) = \begin{cases} V \left( 1 - \frac{\sqrt{n}}{2r} \right)^n & \text{für } r \geq \frac{\sqrt{n}}{2} \\ 0 & \text{für } r < \frac{\sqrt{n}}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Zusatz: Notwendig für  $G \leq \alpha_n (R+c)^n$  bzw.  $G \leq V (1+c'/r)^n$  ist  $c \geq \alpha_n^{1/n}$  bzw.  $c' \geq \alpha_n^{-1/n}$ . Für  $n=1$  und  $2$  ist das auch hinreichend.

Bemerkung: Die Ungleichungen (1) sind sehr grob; (2) und (3) sind nur für kugelähnliche  $K$  einigermaßen scharf. Immerhin sind (2) und (3) in 1. Näherung optimal, d.h. der Summand mit dem Homogenitätsgrad  $n$  ist  $\alpha_n R^n$  bzw.  $\alpha_n r^n$  bzw.  $V$ . Die rechten Seiten von (2) und (3) lassen sich vermutlich auch für  $n > 2$  noch zu  $\alpha_n (R+c)^n$  bzw.  $V (1+c/r)^n$  mit  $c = \alpha_n^{-1/n}$  verbessern.

Aus dem Satz von Krupizka folgt noch, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\varrho_\varepsilon$  so gibt, dass  $G \leq \alpha_n (R+\varepsilon)^n$  für  $R \geq \varrho_\varepsilon$  und  $\alpha_n (r-\varepsilon)^n \leq G$  für  $r \geq \varrho_\varepsilon$ .

### Satz 3

Sei  $K \in \mathfrak{R}^n$ . Für die Gültigkeit von

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} W_\nu b_\nu \leq G \leq \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} W_\nu c_\nu \quad (4)$$



ist notwendig:  $b_0 \leq 1$ ,  $b_1 \leq -1/2$ ,  $b_\nu \leq 0$ ,  $\nu = 2, \dots, n$ ;  $c_\nu \geq \alpha_\nu^{-1}$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n$   
 und hinreichend:  $b_0 \leq 1$ ,  $b_1 \leq -\sqrt{n}/2$ ,  $b_\nu \leq 0$ ,  $\nu = 2, \dots, n$ ;  $c_\nu \geq (\sqrt{n}/2)^\nu$ ,  
 $\nu = 0, 1, \dots, n$ .

Bemerkung: Satz 3 ist zweifellos interessanter als Satz 2. Zwar wird  $G$  durch mehr Funktionale abgeschätzt, was die praktische Bedeutung schmälert; aber die Ungleichungen sind linear und geben dazu mehr Informationen über den geometrischen Sachverhalt. Bemerkenswert ist, dass für die Abschätzung von  $G$  nach oben alle  $W_\nu$  benötigt werden, für die Abschätzung von  $G$  nach unten aber nur  $V$  und  $F$ .

Nach Satz 3 gilt also

$$V - \frac{\sqrt{n}}{2} F \leq G \leq \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} W_\nu \left( \frac{\sqrt{n}}{2} \right)^\nu. \quad (5)$$

Vermutlich sind aber die notwendigen Bedingungen zugleich hinreichend, d.h. vermutlich ist:

$$V - \frac{F}{2} \leq G \leq \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{W_\nu}{\alpha_\nu}. \quad (6)$$

Für  $n = 1$  sind diese Ungleichungen trivialerweise richtig; für  $n = 2$  lauten sie:  $V - F/2 \leq G \leq V + F/2 + 1$ , das ist das Ergebnis von Nosarzewska. Für  $n = 3$  wurde die linke Seite von (6) inzwischen bewiesen [2]. Wie scharf die rechte Seite von (6) ist, zeigt das Beispiel eines Würfels  $Q_q = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 \leq x_i \leq q, i = 1, \dots, n\}$  mit  $q$  ganz. Hier ist (siehe [4], S. 206 (54)):  $W_\nu = \alpha_\nu q^{n-\nu}$ , also

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{W_\nu}{\alpha_\nu} = (q+1)^n = G.$$

## 5. Beweise

Beweis von Satz 1 a): Zuerst stellen wir fest, dass für jedes  $K \in \mathfrak{R}^n$   $W_n = \alpha_n$  ist, also keine Ungleichung  $G \leq \varphi(W_n)$  und keine nichttriviale Ungleichung  $\psi(W_n) \leq G$  existieren kann.

Zum Beweis, dass die übrigen Ungleichungen nicht möglich sind, werden passende Folgen uneigentlicher konvexer Mengen konstruiert. Die Beschränkung auf uneigentliche Mengen ist dabei unwesentlich.

Sei  $L_q = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 \leq x_1 < q, x_i = 0, i = 2, \dots, n\}$   $q = 1, 2, \dots$ . Dann ist  $r(L_q) = d(L_q) = W_\nu(L_q) = 0$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n-2$ , aber  $G(L_q) = q$ , und mit  $q \rightarrow \infty$  folgt, dass es keine Ungleichungen vom Typ  $G \leq \varphi(r)$ ,  $G \leq \varphi(d)$ ,  $G \leq \varphi(W_\nu)$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n-2$  gibt.

Sei  $Q_q = \{(x_1, \dots, x_n) / x_1 = 1/2, 0 \leq x_i < q, i = 2, \dots, n\}$   $q \in [0, \infty)$ . Dann ist  $D(Q_q) = 2R(Q_q) = \sqrt{n-1} q$  und (siehe [4], S. 216 (55))  $W_\nu(Q_q) = c_\nu q^{n-\nu}$  mit gewissen  $c_\nu > 0$  für  $\nu = 1, \dots, n-1$ .

Mit  $q$  durchlaufen also auch  $R(Q_q)$ ,  $D(Q_q)$ ,  $W_\nu(Q_q)$ ,  $\nu = 1, \dots, n-1$  alle Werte von 0 bis  $\infty$ . Wegen  $G(Q_q) = 0$  für jedes  $q$  folgt damit notwendig:  $\psi(f) \leq 0$  für  $0 \leq f < \infty$ ; d.h. es gibt nur triviale Ungleichungen  $\psi(R) \leq G$ ,  $\psi(D) \leq G$ ,  $\psi(W_\nu) \leq G$ ,  $\nu = 1, \dots, n-1$ .

Der analoge Schluss für  $W_0 = V$  folgt mit  $T_q = \{(x_1, \dots, x_n)/0 < x_1 < 1, 0 \leq x_i < q, i = 2, \dots, n\}$ . Damit ist a) bewiesen.

b) In Satz 2 werden 3 der 5 Ungleichungen angegeben. Eine Ungleichung für  $d$  erhält man aus der für  $r$  wegen  $2r \leq d \leq 2\sqrt{n} + 1r$  (nach dem Satz von Steinhagen, siehe z.B. [1], S. 79). Eine Ungleichung für  $W_{n-1}$  erhält man aus der für  $D$  wegen  $\alpha_{n-1}/n D \leq W_{n-1} \leq \alpha_n/2 D$  (siehe z.B. [4], S. 212 (44) und S. 219 (65) mit  $a = 0$  und  $h = D$ ). Damit ist b) bewiesen.

*Lemma 1.* Sei  $K \in \mathfrak{R}^n$ . Dann ist  $V(K_{-\sqrt{n}/2}) \leq G(K) \leq V(K_{\sqrt{n}/2})$ .

Beweis. Ist  $G(K) = 0$ , so ist  $r(K) \leq \sqrt{n}/2$  und  $K_{-\sqrt{n}/2}$  uneigentlich oder leer, also  $V(K_{-\sqrt{n}/2}) = 0$ . Weiter ist  $V(K_{\sqrt{n}/2}) > 0$ , also die Behauptung bewiesen. Sei also  $G(K) > 0$ . Jedem Gitterpunkt  $g_i \in K$  werde ein achsenparalleler abgeschlossener Würfel  $Q_i$  der Kantenlänge 1 und mit  $g_i$  als Mittelpunkt zugeordnet. Es gibt  $G$  solcher  $Q_i$ . Sei  $Q = \bigcup_{i=1}^G Q_i$ .

Für jedes  $x \in Q_i$  gilt  $|x - g_i| \leq \sqrt{n}/2$ . Also gilt  $K_{-\sqrt{n}/2} \subset Q \subset K_{\sqrt{n}/2}$  und damit  $V(K_{-\sqrt{n}/2}) \leq V(Q) \leq V(K_{\sqrt{n}/2})$ . Mit  $V(Q) = G$  folgt die Behauptung.

*Lemma 2.* Für  $\varrho \in (-\infty, \infty)$  gilt  $V(K_\varrho) \geq V(K) + \varrho F(K)$ .

Beweis. Wegen der Stetigkeit von  $V$  und  $F$  kann angenommen werden:  $K$  ist ein Polytop. Weiter seien  $F_i$  die  $(n-1)$ -dimensionalen Seitenflächen von  $K$  und  $f_i$  deren  $(n-1)$ -dimensionales Volumen. Also  $F(K) = \sum_i f_i$ .

Der Beweis jetzt in 3 Teilen:

a)  $\varrho \geq 0$ . Zu einem  $F_i$  sei  $Z_i$  der Zylinder der Höhe  $\varrho$  über der Grundfläche  $F_i$  von  $K$  nach aussen. Weiter sei  $Z = \bigcup_i Z_i$ . Dann ist  $V(Z) = \varrho F(K)$ . Wegen  $K_\varrho \supset K \cup Z$  folgt  $V(K_\varrho) \geq V(K) + V(Z) = V(K) + \varrho F(K)$ .

b)  $-\varrho \leq \varrho < 0$ . Die  $Z_i$  mit der Höhe  $|\varrho|$  seien wie in a) erklärt, nur diesmal seien sie ins Innere von  $K$  aufgetragen. Wieder sei  $Z = \bigcup_i Z_i$ . Dann gilt  $V(Z) \leq |\varrho| F(K)$ , da sich die  $Z_i$  wegen der Konvexität von  $K$  teilweise überdecken. Andererseits folgt aus der Definition von  $K$ :  $K_\varrho = K \setminus Z$ , also wegen  $\varrho < 0$ :  $V(K_\varrho) \geq V(K) - |\varrho| F(K) = V(K) + \varrho F(K)$ .

c)  $\varrho < -r$ . Wie in b). Hier ist  $K_\varrho = \emptyset$ , also  $V(K_\varrho) = 0$ . Weiter ist  $K \subset Z$ , also  $V(K) \leq V(Z) \leq |\varrho| F(K)$ , d.h.  $0 \geq V(K) + \varrho F(K)$ .

Beweis von Satz 2. Ist  $r > 0$ , dann gilt für die äussere Parallelmenge  $V(K_\rho) \leq (1 + \varrho/r)^n V(K)$  und für die innere:  $V(K_{-\rho}) \geq (1 - \varrho/r)^n V(K)$  (siehe z.B. [5], S. 66), wenn nur  $\varrho \leq r$  ist. Mit  $\varrho = \sqrt{n}/2$  und Lemma 1 folgen die Ungleichungen (3).

Ist  $S_r$  eine Inkugel,  $S_R$  die Umkugel von  $K$ , so gilt:  $K_{\sqrt{n}/2} \subset S_{R+\sqrt{n}/2}$  also  $V(K_{\sqrt{n}/2}) \leq \alpha_n (R + \sqrt{n}/2)^n$  und für  $r \geq \sqrt{n}/2$   $S_{r-\sqrt{n}/2} \subset K_{-\sqrt{n}/2}$ , also  $\alpha_n (r - \sqrt{n}/2)^n \leq V(K_{-\sqrt{n}/2})$ . Mit Lemma 1 folgen daraus die Ungleichungen (2). Zum Beweis der rechten Seite von (1) beachte man, dass für je zwei Gitterpunkte  $g_i, g_j \in K$  gilt:  $|g_i - g_j| \leq D$ . Also ist das  $Q$  aus Lemma 1 enthalten in einem achsenparallelen abgeschlossenen Würfel der Kantenlänge  $D + 1$ , und es ist  $G \leq (D + 1)^n$ .

Zum Beweis der linken Seite von (1) wird ein ganz anderer Gedanke herangezogen: Sei  $K \in \mathfrak{R}^n$  und  $G(K) = \lambda n + \mu$  mit ganzen Zahlen  $\lambda \geq 0$  und  $0 \leq \mu < n$ . Ist  $\mu = 0$ , so kann  $K$  durch (höchstens)  $\lambda$  verschiedene Hyperebenen  $H_i$ , die jeweils

(mindestens)  $n$  der Gitterpunkte aus  $K$  enthalten, sukzessive in  $\lambda + 1$  (nichtabgeschlossene) konvexe Mengen  $K_i$  mit  $G(K_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, \lambda + 1$  zerlegt werden. Ist  $\mu > 0$ , so wird *i.a.* eine weitere Hyperebene benötigt, und man erhält  $\lambda + 2$  verschiedene  $K_i$ . Wir fassen beide Fälle zusammen, indem gegebenenfalls  $K_{\lambda+2} = \emptyset$  sei.

Wir haben:  $G(K_i) = 0$  für  $i = 1, \dots, \lambda + 2$ . Weiter gilt:  $\sum_{i=1}^{\lambda+2} V(K_i) = V(K)$  und  $F(K_i) \leq F(K)$  für  $i = 1, \dots, \lambda + 2$ . Wegen  $G(K_i) = 0$  folgt mit dem Satz von Hadwiger:  $V(K_i) \leq (1/2) F(K_i)$ .

Also

$$V(K) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\lambda+2} F(K_i) \leq \frac{\lambda+2}{2} F(K) \leq \left( \frac{G(K)}{2n} + 1 \right) F(K)$$

oder

$$2n \left( \frac{V}{F} - 1 \right) \leq G.$$

Beweis des Zusatzes: Sei  $S_\varepsilon$  eine Kugel mit Radius  $\varepsilon > 0$  um einen Gitterpunkt. Dann folgt die Notwendigkeit der Bedingungen mit  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Die Hinlänglichkeit für  $n = 2$  folgt wegen  $2\sqrt{\pi} R > \pi R \geq F/2$  bzw.  $2V/\sqrt{\pi} r > V/r \geq F/2$  und  $V/\pi r^2 \geq 1$  aus  $G \leq V + F/2 + 1$  von Nosarzewska.

Beweis von Satz 3 a). Hinlänglichkeit: Sei  $K \in \mathfrak{R}^n$ . Dann folgt die linke Seite von (4) aus Lemma 1 und Lemma 2 mit  $\varrho = -\sqrt{n}/2$ .

Für die äussere Parallelmengen  $K_\varrho$  gilt nach Steiner:  $V(K_\varrho) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} W_v \varrho^v$  Mit  $\varrho = \sqrt{n}/2$  und Lemma 1 folgt die rechte Seite von (4).

Da (4) richtig bleibt, wenn die  $b_\nu$  verkleinert bzw. die  $c_\nu$  vergrössert werden, ist die Hinlänglichkeit bewiesen.

b) Notwendigkeit: Wie im Beweis von Satz 1 werden passende konvexe Mengen konstruiert. Sei  $j \in [0, n]$  und  $P_q^{(j)} = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 \leq x_i < q \text{ für } i = 1, \dots, j, x_i = 0 \text{ für } i = j+1, \dots, n\}$

Nach [4], S. 216 (55) ist  $W_\nu(P_q^{(j)}) = \binom{n+j}{\nu} / \binom{n+j}{j} \alpha_\nu q^{n-\nu}$ .

Für  $\nu < n - j$  ist also  $W_\nu(P_q^{(j)}) = 0$ .

Für  $\nu = n - j$  ist  $\binom{n}{\nu} W_\nu(P_q^{(j)}) = \alpha_{n-j} q^j$ .

Für  $\nu > n - j$  ist  $W_\nu(P_q^{(j)}) = 0$  ( $q^{j-1}$ ).

Wegen  $G(P_q^{(j)}) = q^j$  folgt mit  $q \rightarrow \infty$ :  $c_j \geq \alpha_j^{-1}$ . Wegen  $j \in [0, n]$  beliebig folgt die Behauptung für die rechte Seite von (4).

Sei  $j \in [0, n]$  und  $Q_q^{(j)} = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 \leq x_i < q \text{ für } i = 1, \dots, j, x_i = 1/2 \text{ für } i = j+1, \dots, n\}$  Dann ist  $W_\nu(Q_q^{(j)}) = W_\nu(P_q^{(j)})$  für  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Für  $j = 0, 1, \dots, n-1$  ist  $G(Q_q^{(j)}) = 0$ , also folgt mit  $q \rightarrow \infty$ :  $b_{n-j} \leq 0$  für  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , d.h.  $b_\nu \leq 0$  für  $\nu = 1, \dots, n$ .

Für  $j = n$  ist  $V(Q_q^{(n)}) = G(Q_q^{(n)}) = q^n$  und  $W_\nu(Q_q^{(n)}) = \alpha_\nu q^{n-\nu}$ ,  $\nu = 1, \dots, n$ .

Mit  $q \rightarrow \infty$  folgt daraus  $b_0 \leq 1$ .

Sei  $T_q = \{(x_1, \dots, x_n) / 0 < x_1 < 1, 0 \leq x_i < q, i = 2, \dots, n\}$ .

Dann ist  $V(T_q) = q^{n-1} F(T_q) = 2q^{n-1} + 2(n-1)q^{n-2}$

und  $W_\nu(T_q) = 0$  ( $q^{n-2}$ ) für  $\nu = 2, \dots, n$ .

Wegen  $G(T_q) = 0$  folgt daraus mit  $q \rightarrow \infty$ :  $2b_1 + b_0 \leq 0$

und mit  $b_0 \leq 1$  folgt daraus  $b_1 \leq -1/2$ . Damit ist Satz 3 bewiesen.

J. M. Wills, TU Berlin

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] BONNESEN-FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper* (New York, Chelsea Publ. Co. 1948).
- [2] J. BOKOWSKI und J. M. WILLS, *Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Mengen im  $R^3$* . Erscheint in Acta Math. Hung. Bd. 25.
- [3] H. GROEMER, *Eine Bemerkung über Gitterpunkte in ebenen konvexen Bereichen*, Arch. Math. 10, 62–63 (1949).
- [4] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, (Springer, Berlin 1957).
- [5] H. HADWIGER, *Altes und Neues über konvexe Körper* (Birkhäuser, Basel 1955).
- [6] H. HADWIGER, *Volumen und Oberfläche eines Eikörpers, der keine Gitterpunkte überdeckt*. Math. Z. 116, 191–196 (1970).
- [7] L. K. HUA, *Abschätzungen von Exponentialsummen*, Enzyklopädie Math. Wiss. Bd. I, 2, 29 (Teubner, Leipzig 1959).
- [8] S. KRUPIZKA, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen konvexen Körpern*, Czechoslovak Math. J. 7 (82) 550–552 (1957).
- [9] M. NOSARZEWSKA, *Evaluation de la différence entre l'aire d'une région plane convexe et le nombre des points aux coordonnées entières couverts par elle*, Colloq. math. 1, 305–311 (1947).
- [10] J. E. REEVE, *On the Volume of Lattice Polyhedra*. Proc. Lond. math. Soc. (3) 7, 378–395 (1957).
- [11] J. E. REEVE, *A Further Note on the Volume of Lattice Polyhedra*. J. Lond. math. Soc. 34, 57–62 (1959).
- [12] WARMUS, *Kurzmitteilung*. Colloq. math. 1, 45–46 (1947).

## Ein isoperimetrisches Problem mit Nebenbedingung

Als Variante des klassischen isoperimetrischen Problems bestimmt Besicovitch in [1] u. a. solche konvexen Bereiche des euklidischen  $R^2$ , welche in einem gegebenen kompakten konvexen Bereich  $K$  enthalten sind und bei vorgegebenem Umfang  $F$  maximalen Flächeninhalt  $V$  liefern. Es zeigt sich, dass dabei die inneren  $\varrho$ -Hüllen  $K^\varrho$ ,  $\varrho \in [0, r]$ ,  $r = \text{Inkugelradius von } K$ , d. s. die abgeschlossenen Hüllen der Vereinigungen aller in  $K$  enthaltenen Kugeln vom Radius  $\varrho$ , eine ausgezeichnete Rolle spielen.

Wir interessieren uns in dieser Note für folgendes verwandte Problem im  $R^n$ ,  $n \geq 2$ :

Ist  $P$  ein konvexes Tangentialpolyeder an seine Inkugel  $S_r$ ,  $r > 0$ , also  $V(P)/F(P) = V(S_r)/F(S_r) = r/n$ , so suchen wir das (nach dem Auswahlprinzip sicher existierende)  $\max V(\Gamma)/F(\Gamma) \mid \Gamma \text{ konvex, } S_r \subset \Gamma \subset P$  und die zugehörigen Extremalkörper.

Im  $R^2$  lautet das Ergebnis

$$\frac{V(\Gamma)}{F(\Gamma)} \leq \frac{V(P^{\varrho_0})}{F(P^{\varrho_0})} = \varrho_0 = \frac{[r V(P) - r^2 \sqrt{\pi V(P)}]}{[V(P) - \pi r^2]} \quad (1)$$

und Gleichheit gilt nur für  $\Gamma = P^{\varrho_0}$ .