Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 28 (1973)
Heft: 2

Artikel: Über die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Physik
Autor: Waerden, B.L. van der
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29450

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

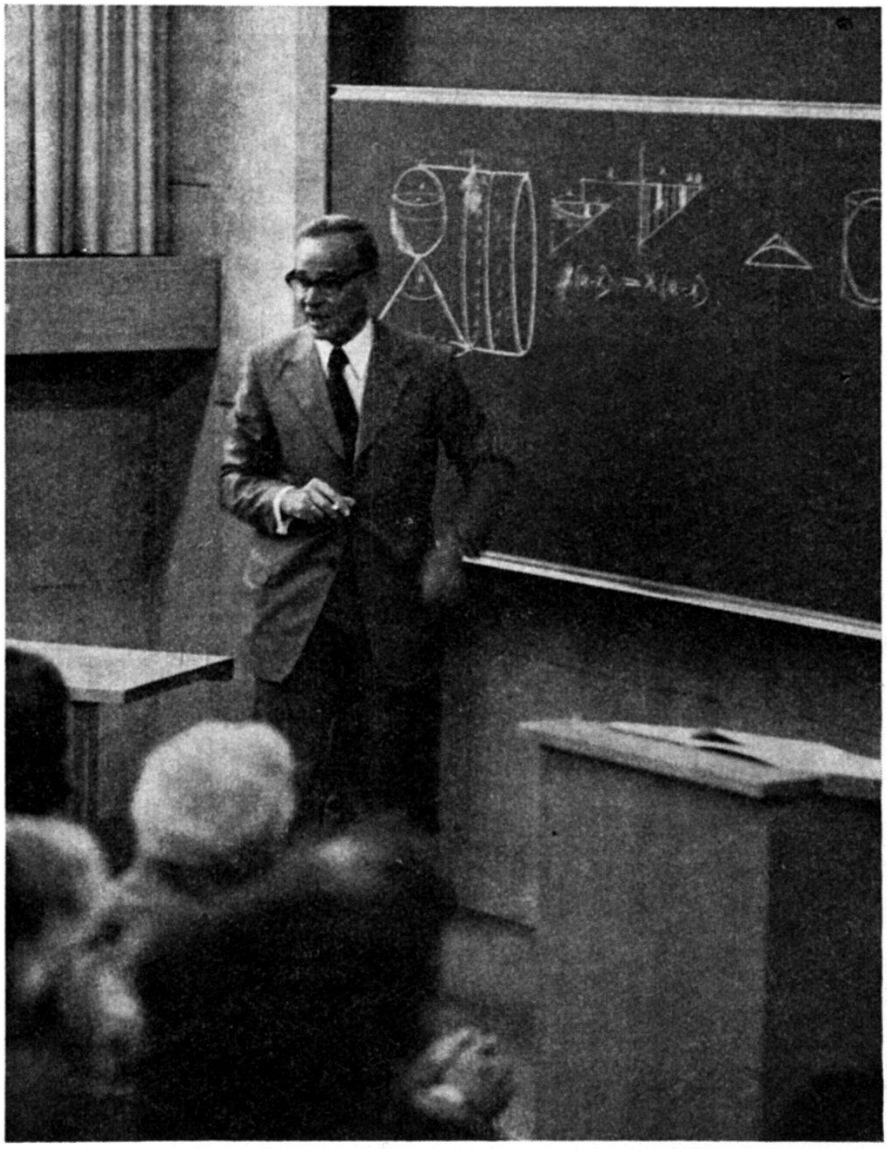
Über die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Physik

Abschiedsrede, gehalten am 12. Juli 1972 als Abschluss einer Vorlesung über Gruppentheorie und Quantenmechanik

Im Laufe dieser Vorlesung hat sich immer wieder gezeigt, wie wichtig die Mathematik für die theoretische Physik ist. Das gilt sowohl für die klassische Physik als auch für die Quantenmechanik. Zum Beispiel: Ohne den Satz von John von Neumann über die Spektralzerlegung der selbstadjungierten linearen Operatoren wäre die ganze Quantenmechanik nicht einmal exakt logisch formulierbar!

Also: Die Physiker brauchen die Mathematiker. Das ist übrigens allgemein bekannt.

Ich möchte Ihnen nun an Beispielen zeigen, dass auch die Mathematik für ihr Blühen und Gedeihen die Physik braucht. Ganze Zweige der klassischen und auch der modernen Mathematik sind nur durch Anregungen aus der Physik und Astronomie entstanden.



Die vier Wissenschaften der Pythagoreer

Das Wort Mathematik ist abgeleitet von Ta Mathemata, «die Lerngegenstände», die exakten Wissenschaften. Die Pythagoreer hatten ein System von vier Wissenschaften:

Arithmetik, Geometrie, Harmonik, Astronomie.

Diese vier gehörten zusammen. Teile der Arithmetik wurden hauptsächlich wegen der Anwendung auf die Harmonik entwickelt. Gewisse Lehrsätze der Geometrie wurden speziell wegen der Anwendung auf die Astronomie in die «Elemente» aufgenommen, so die Konstruktion des regulären 15-Ecks in einem Kreis. Der Grosskreisbogen vom Pol der Ekliptik zum Pol des Äquators war nämlich nach damaligen Messungen 24°, d. h., er war gleich dem Bogen, der von einer Seite des regulären 15-Ecks unterspannt wird. Also war die Konstruktion des 15-Ecks für die Astronomie nützlich, und aus eben diesem Grund wurde diese Konstruktion in die «Elemente» aufgenommen, wie Proklos uns in seinem Kommentar mitteilt.

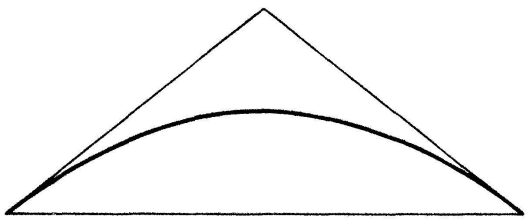
In seinem Kommentar zu der Konstruktion für das Fällen eines Lotes (Euklid, Elemente I 23) teilt Proklos mit, dass Oinopides von Chios der erste war, der diese Aufgabe behandelte, weil er sie für die Astronomie nützlich fand. Die Geometrie hat also schon im 5. Jahrhundert wichtige Anregungen von der Astronomie erhalten, ebenso wie die Arithmetik von der Harmonik angeregt wurde. Nach der Lehre der Pythagoreer entsprechen den symphonen Intervallen der Musik bestimmte Zahlenverhältnisse. Der Oktave entspricht das Verhältnis 2:1, der Quinte 3:2, der Quarte 4:3. Daher brauchten die Pythagoreer zur Begründung ihrer Harmonik gewisse Sätze aus der Arithmetik der Zahlenverhältnisse.

Wenn diese Zusammenhänge im Bewusstsein der Pythagoreer nicht vorhanden gewesen wären, so wäre das System der 4 Mathemata jedenfalls nicht in der vorliegenden Form entstanden.

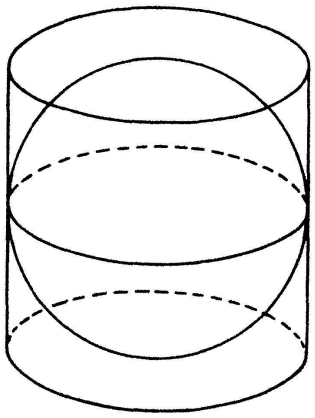
Die «Methode» des Archimedes

Als Archimedes noch kein alter Grieche, sondern ein junger Grieche war, fand er drei berühmte Sätze:

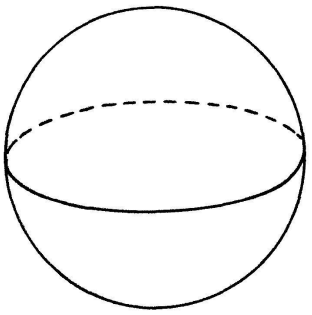
1. Der Inhalt eines Parabelsegmentes ist $^2/_3$ vom Inhalt des umbeschriebenen Dreiecks.
2. Der Inhalt einer Kugel ist $^2/_3$ vom Inhalt des umbeschriebenen Zylinders.
3. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich 4mal Oberfläche des Äquatorkreises.



Figur 1



Figur 2

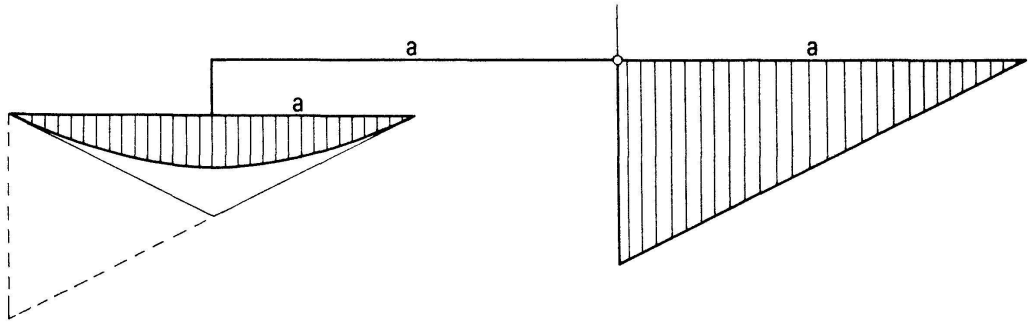


Figur 3

Archimedes war auf die Entdeckungen so stolz, dass er den Wunsch geäussert hat, die Kugel mit dem umbeschriebenen Zylinder in seinen Grabstein einmeisseln zu lassen. Nachdem ein römischer Soldat ihn erschlagen hatte, hat der römische Feldherr Marcellus den Wunsch seines grossen Gegners Archimedes erfüllt. Cicero hat, als er auf Sizilien Quästor war, das Grabmal mit Kugel und Zylinder noch gesehen.

Wie hat Archimedes die drei Sätze gefunden? Darüber berichtet er in einem offenen Brief an Eratosthenes, der in den Werken des Archimedes unter dem Titel «Die Methode» zu finden ist.

Archimedes denkt sich das Parabelsegment etwa aus einer dünnen Metallplatte ausgeschnitten und hängt es als Ganzes am Ende eines Hebelarmes auf. Seine Überlegung gilt auch für schiefe Parabelsegmente, aber der Einfachheit halber will ich jetzt ein gerades Parabelsegment annehmen. Der Hebelarm wird gleich der Sehne des Segmentes gemacht.



Figur 4

Nun zieht Archimedes eine Tangente in einem Eckpunkt des Parabelsegmentes und konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck (in der Figur gestrichelt). Dieses Dreieck schneidet er aus seiner Metallplatte aus und hängt es am anderen Hebelarm auf, nicht am Ende, sondern am Hebelarm selbst, mit der Spitze nach aussen.

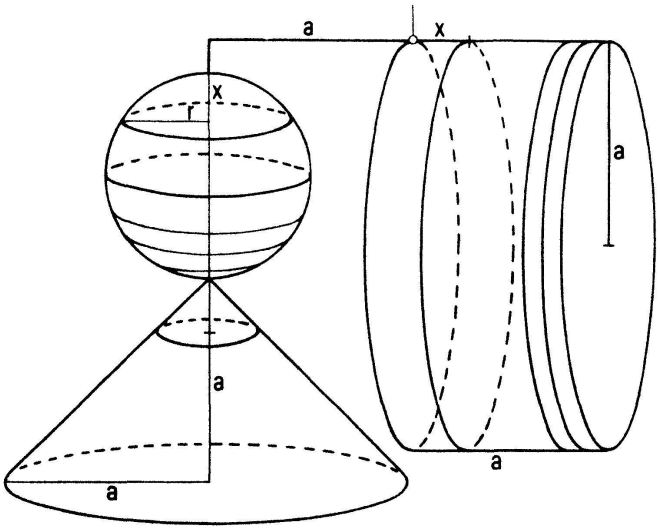
Nun wird behauptet, dass das Parabelsegment mit dem Dreieck Gleichgewicht macht. Um das plausibel zu machen, zerlegt Archimedes das Parabelsegment in so dünne Streifen, dass jeder Streifen als eine Strecke betrachtet werden kann. Ebenso zerlegt er auch das Dreieck in dünne Vertikalstreifen, die als Strecken betrachtet werden. Jede dieser Strecken macht Gleichgewicht mit einer Strecke in der Parabel; das folgt sehr leicht aus der Gleichung der Parabel, die Archimedes kannte, und aus dem Hebelgesetz, das er selbst bewiesen hat. Also, so schliesst er, muss das ganze Parabelstück, das ja aus allen den Strecken zusammengesetzt ist, Gleichgewicht machen mit dem ganzen Dreieck.

Anderseits kann man das Dreieck auch in seinem Schwerpunkt aufhängen; für die Wirkung auf den Hebel macht das nichts aus. Da nun der Hebelarm, an dem das Parabelsegment hängt, dreimal so lang ist wie der andere Hebelarm bis zum Schwerpunkt, muss das Gewicht des Dreiecks dreimal so gross sein wie das Gewicht des Parabelsegmentes, das heisst, die Fläche des Segmentes ist ein Drittel der Dreiecksfläche oder zwei Drittel der Fläche des umbeschriebenen Dreiecks der Parabel.

Ein Beweis ist das natürlich nicht, das wusste Archimedes sehr wohl; denn eine Fläche ist nicht eine Summe von Strecken. Aber durch diese Überlegung gewann

Archimedes doch die Überzeugung, dass sein Ergebnis richtig war. Und das ist sehr viel wert, «denn wenn man einmal eine gewisse Kenntnis des Gesuchten hat», so schreibt er selbst, «ist es viel leichter, den Beweis zu führen, als wenn man nichts davon weiss.»

Als nächstes stellte Archimedes sich das Problem, den Inhalt der Kugel mit derselben Methode zu finden. Er dachte sich also die Vollkugel am Ende eines Hebelarms aufgehängt. Der Durchmesser der Kugel sei a; die Länge des Hebelarms wählte er ebenfalls gleich a. Am selben Hebelarm hing er einen geraden Kreiskegel auf, mit Höhe a und Radius des Grundkreises ebenfalls gleich a.

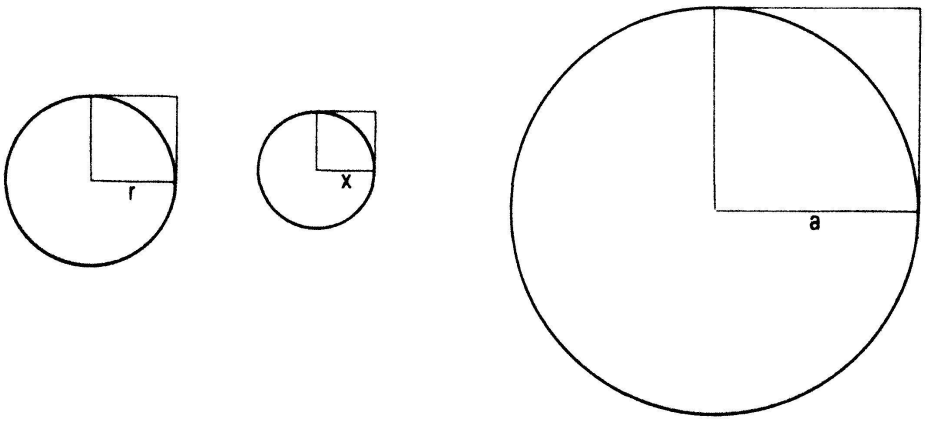


Figur 5

Am anderen Hebelarm hing er einen Zylinder auf, dessen Höhe und Grundkreisradius wieder gleich a sind.

Nun denkt Archimedes sich die Kugel, den Kegel und den Zylinder aus dünnen Kreisscheiben zusammengesetzt. Behauptet wird, dass jede Kreisscheibe im Zylinder im Abstand x vom Aufhängepunkt mit den beiden Kreisscheiben in der Kugel und im Kegel im gleichen Abstand x vom obersten Punkt der Kugel bzw. von der Kegelspitze Gleichgewicht macht.

Zeichnen wir die drei Kreise einmal heraus:



Figur 6

Wir haben zu zeigen, dass die Summe der beiden kleineren Kreisflächen sich zur grösseren Kreisfläche verhält wie der Hebelarm x zum Hebelarm a. Archimedes wusste – Eudoxos hatte es schon bewiesen –, dass Kreisflächen proportional sind zu den Quadraten ihrer Radien. Es ist also nur zu beweisen:

$$(r^2 + x^2) : a^2 = x : a$$

Nun ist bekanntlich in der Kugel

$$r^2 = x\,(a - x)$$

also

$$r^2 + x^2 = ax$$

und

$$ax : a^2 = x : a$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Da also die einzelnen Kreisscheiben Gleichgewicht machen, so ist es plausibel, dass auch die ganze Kugel und der ganze Kegel mit dem Zylinder Gleichgewicht machen. Nun kann man aber das ganze Gewicht des Zylinders in seinem Schwerpunkt konzentriert denken. Dann verhalten sich die Hebelarme wie 2 zu 1, also müssen sich die Gewichte wie 1 zu 2 verhalten:

$$\text{Kugel} + \text{Kegel} = {}^1/_2\ \text{Zylinder}.$$

Nun ist der Kegel nach Eudoxos gleich einem Drittel seines umbeschriebenen Zylinders, also hat man

$$\text{Kugel} + {}^1/_3\ \text{Zylinder} = {}^1/_2\ \text{Zylinder}$$

oder

$$\text{Kugel} = {}^1/_6\ \text{Zylinder}.$$

Der Zylinder am rechten Hebelarm ist gleich 4 mal dem umbeschriebenen Zylinder der Kugel, also ist die Kugel dem Inhalte nach gleich $^4/_6$ dieses Zylinders, was zu zeigen war.

Wenn Archimedes sich nicht vorher mit dem Hebelgesetz befasst hätte, wäre die Idee zu dieser Herleitung ihm nie gekommen.

Newton und die Differentialrechnung

Wir springen nun ins 17. Jahrhundert. Newton hat die Differentialrechnung entdeckt, weil er sie brauchte für seine Planetentheorie. Er wollte beweisen: Wenn ein Planet sich auf einer Ellipse nach den Keplerschen Gesetzen bewegt, dann ist der Beschleunigungsvektor zur Sonne gerichtet und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes. Dabei musste er die Geschwindigkeit als Vektor betrachten und diesen Vektor nach der Zeit differenzieren. Er war also genötigt, die Vektorrechnung und die Differentialrechnung zu erfinden!

Nachdem Newton das Ergebnis gefunden hatte, gab er nachher einen untadeligen Beweis im Stil der griechischen Geometrie, ohne Differentialrechnung, mit Epsilon und Delta.

Nun werden Sie vielleicht sagen: Ja, aber die Differentialrechnung wäre auch ohne Newton entdeckt worden. Leibniz ging, von Pascal angeregt, von ganz anderen Überlegungen aus, und die Brüder Jakob und Johann Bernoulli haben auf den Ideen von Leibniz das ganze Gebäude der Differential- und Integralrechnung aufgebaut.

Das ist gewiss richtig, aber auch die Variationsrechnung ging von einem Problem der Physik aus, nämlich vom Problem der Kurve kürzester Fallzeit zwischen zwei Punkten. Und weiter:

- die Betrachtung der Schwingungen einer eingespannten Saite führte zur *Fourier-Reihe* und zur *Eigenwerttheorie* der Differentialoperatoren,
- die Untersuchungen von Fourier über die Wärmeleitung führten ihn zum *Fourier-Integral*,
- viele von Eulers fruchtbaren Gedanken entsprangen der Beschäftigung mit der *Mechanik der Continua*,
- die *Säkulargleichung* stammt aus der Astronomie, nämlich aus der Theorie der säkulären Störungen,
- die ganze *Potentialtheorie* ist aus der Physik erwachsen,
- ebenso die *Ergodentheorie*.

Riemann und die Abelschen Integrale

Nun will ich Ihnen eine Geschichte erzählen über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Eine schöne Geschichte; sie steht bei Felix Klein in seinen berühmten «Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert».

Es sei z eine komplexe Variable und w eine algebraische Funktion von z, definiert durch eine algebraische Gleichung

$$f(z, w) = 0 .$$

Die Funktion w ist eindeutig auf einer Riemannschen Fläche, die mehrblättrig über die z-Ebene ausgebreitet ist. Nun wollte Riemann die von ihm so genannten «Abelschen Integralen» konstruieren, also Integrale $\int u\, dz$, wobei u eine rationale Funktion von z und w sein soll.

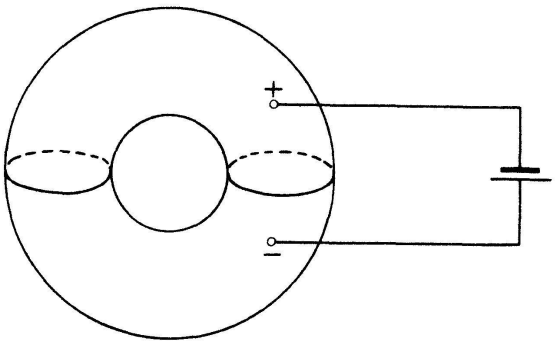
Riemann unterscheidet 3 Gattungen von Abelschen Integralen:

1. Gattung: Das Differential $u\, dz$ hat, ausgedrückt durch die jeweilige Ortsuniformisierende, keine Pole.

2. Gattung: Das Differential hat nur Pole von zweiter und höherer Ordnung ohne Residuum; das Integral hat also nur Pole 1. und höherer Ordnung.

3. Gattung: $u\, dz$ hat nur Pole 1. Ordnung, das Integral also nur logarithmische Singularitäten.

Fangen wir, immer nach Klein, mit den Integralen 3. Gattung an. Riemann stellte sich eine Riemannsche Fläche im Raum aus dünnem Blech vor. Er legt an 2 Punkten Elektroden an und legt eine Spannung an.



Figur 7

Dann wird ein stationärer Strom von + zu − fliessen. Das Potential U ist überall eindeutig, verhält sich in der Nähe der Pole wie der Realteil von $\pm\, c \log z$ und erfüllt sonst überall die Potentialgleichung

$$\Delta U = 0\,.$$

Dazu gibt es dann eine mehrdeutige Funktion V, so dass $U + iV$ eine analytische Funktion auf der Riemannschen Fläche ist. Diese Funktion $U + iV$ ist das gesuchte Integral.

In analoger Weise kann man auch die Integrale erster und zweiter Gattung konstruieren.

Diese Geschichte wurde noch zu meiner Zeit in Göttingen erzählt, und sie hat einen tiefen Eindruck auf mich gemacht.

Nun habe ich – wie es sich für einen Historiker ziemt – einmal bei Riemann nachgeschaut. Da steht aber kein Wort von einem elektrischen Strom, auch nicht von einem Wärmestrom oder Flüssigkeitsstrom, sondern Riemann leitet die Existenz der Integrale erster, zweiter und dritter Gattung aus einem Prinzip her, das Riemann selbst zuerst aufgestellt und aus Verehrung für seinen Lehrer «Dirichletsches Prinzip» genannt hat.

Ja, wie nun? Hat Klein die Geschichte erfunden oder hat Riemann sie ihm vielleicht mündlich erzählt?

In seinem Buch sagt Klein, dass er in einer Abhandlung in den Math. Annalen «Über die Riemannsche Theorie der Abelschen Integrale» die Sache ausführlicher dargestellt hat. Also habe ich dort nachgeschaut. Was steht dort? Zunächst: Klein hat Riemann nie gesehen und hat auch keine Nachricht über die Art, wie Riemann die Abelschen Integrale zuerst konstruiert hat. Was wirklich geschah, war:

Prym, ein Schüler von Riemann, hat Felix Klein erzählt, dass Riemann nicht nur solche Riemannsche Flächen betrachtet hat, die über der z-Ebene ausgebreitet waren, sondern dass er auch allgemeinere Flächen, z. B. Flächen im Raum, betrachtete. Auch auf einer solchen Fläche kann man analytische Funktionen betrachten, die konforme Abbildungen vermitteln.

Weiter wusste Klein, dass Riemann sich auch mit der Physik befasste. Und nun ging Klein ein Licht auf: So, mit Strömungsfeldern, muss Riemann sich die Sache überlegt haben!

Die ganze schöne Geschichte ist also ein modernes Märchen. Aber etwas Wahres ist doch daran, nämlich erstens: dass Riemann die Potentialtheorie, die aus der

Physik stammt, zur Lösung eines funktionentheoretischen Problems benutzt hat, und zweitens: dass Felix Klein sich eine sehr schöne Methode überlegt hat, wie man durch Betrachtung von Potentialströmungen die Theorie der Abelschen Integrale plausibel und anschaulich herleiten kann. Er hat diese Herleitung vorgetragen in Vorlesungen, die sehr anregend auf die Hörer gewirkt haben.

Die Quantenmechanik

Auch in unserem Jahrhundert haben Mathematik, Physik und Astronomie sich gegenseitig befruchtet bis zum heutigen Tag.

Ich beschränke mich heute auf die Physik und lasse die Arbeiten von Siegel und Stiefel zur Himmelsmechanik ganz beiseite.

Die Begründer der Quantenmechanik haben als selbstverständlich – oder mindestens sehr plausibel – angenommen, dass jeder selbstadjungierte Operator im Raum der Wellenfunktionen ein *Spektrum*, also ein vollständiges System von Eigenfunktionen mit reellen Eigenwerten hat. Bewiesen war das zur Zeit von Born nur für *beschränkte Operatoren*, und zwar durch die Arbeiten von *Hilbert* und *Hellinger*. Für unbeschränkte Operatoren wusste man noch nicht einmal, wie der Begriff selbstadjungiert zu definieren ist. Trotzdem beruhte die ganze Quantenmechanik auf der Annahme, dass man alle Funktionen nach Eigenfunktionen entwickeln kann; das gilt sowohl für die Matrixmechanik von Heisenberg, Born und Jordan als auch für die Wellenmechanik von Schroedinger.

Derjenige, der die Sache logisch in Ordnung gebracht hat, war John von Neumann. Er betrachtete zuerst *maximale symmetrische Operatoren* im Hilbertraum. Dann aber sah er, dass er eine noch schärfere Bedingung stellen musste. Er nannte die Operatoren, die diese schärfere Bedingung erfüllen, *hypermaximal*. Heute nennt man sie einfach *selbstadjungiert*.

Es ist von Neumann gelungen, zu beweisen, dass jeder hypermaximale Operator eine *Spektralzerlegung* hat. Dieser Satz bildet die Grundlage der heutigen Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum. So verdankt ein wichtiger Zweig der heutigen Funktionalanalyse seine Entstehung einer Anregung aus der Physik.

Eine neue, einfachere Begründung der Spektralzerlegung gab *Stone*. Man findet sie in seinem schönen Buch: Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications.

Eingliedrige Halbgruppen

Derselbe Stone bewies im Jahre 1932 einen wichtigen Satz über eingliedrige Gruppen von unitären Transformationen im Hilbertraum. Der Satz wurde 1948 von *Hille* und *Yorsida* unter schwächeren Bedingungen bewiesen. Als Spezialfall ergibt sich: Wenn die unitären Transformationen $U(t)$ für reelle $t \geqq 0$ stetig von t abhängen und die Bedingungen

$$U(s)\,U(t) = U\,(s+t)$$

$$U(0) = 1$$

erfüllen, dann gibt es einen selbstadjungierten Operator H so, dass

$$U(t) = \exp(-iHt)$$

gilt. Auch zu diesem Satz ist die Anregung aus der Physik gekommen, von der zeitabhängigen Schroedinger-Gleichung her. Aus dem Satz folgt, wie ich im Laufe dieser Vorlesung gezeigt habe, dass es in jeder Quantenfeldtheorie, in der ein Kausalitätsprinzip gilt, auch einen Hamilton-Operator H geben muss.

Aus diesem Beispiel sehen Sie, dass bis in die heutige Zeit die Entwicklung der Mathematik durch Anregungen aus der Physik kräftig gefördert wurde.

Darstellungen von Gruppen durch lineare Transformationen

Wie erhält man alle stetigen Darstellungen einer Lie-Gruppe G durch lineare Transformationen? Beschränkt man sich auf lineare Transformationen von endlichdimensionalen Vektorräumen, so wurde die Frage durch die Untersuchungen von Eli Cartan und Hermann Weyl so vollständig beantwortet, wie man es nur wünschen kann. Spätere Untersuchungen von John von Neumann und anderen brachten einige Ergänzungen, aber im wesentlichen war die Theorie um 1930 abgeschlossen.

Da fand der Physiker *Wigner*, dass für die Physik nicht nur die endlich-dimensionalen Darstellungen wichtig sind, sondern auch die Darstellungen im Hilbertraum. Bei kompakten Lie-Gruppen kommt im Hilbertraum nichts wesentlich Neues hinzu, aber bei nicht-kompakten Gruppen wie der Lorentz-Gruppe gibt es noch viel mehr Möglichkeiten. Wigner selbst gab die ersten Beispiele und bewies einige Sätze. Aus der Fragestellung von Wigner hat sich heute eine ganze rein mathematische Theorie entwickelt, die für die Quantenfeldtheorie von grosser Bedeutung ist.

Die Störungstheorie der Spektralzerlegung

Schroedinger, der Begründer der Wellenmechanik, brauchte eine Methode, komplizierte quantenmechanische Systeme, z. B. Atome mit mehreren Elektronen, näherungsweise zu behandeln. Er erfand die *Störungstheorie*. Kurz vorher hatte auch Born im Rahmen der Matrixmechanik eine Methode entwickelt, die der Störungstheorie von Schroedinger äquivalent war.

Diese Störungstheorie war aber mathematisch nicht einwandfrei. *Rellich* war der erste, der sich das Problem stellte, die Störungstheorie exakt mathematisch zu begründen.

Aus dieser Problemstellung ist unter den Händen von *Rellich*, *Friedrichs*, *Kato*, *Wightman* und anderen eine ganze mathematische Theorie entstanden. *Kato* hat unter anderem bewiesen, dass der Hamilton-Operator eines Atoms oder Moleküls tatsächlich selbstadjungiert ist. Dieses Ergebnis ist für die Quantenmechanik der Atome und Moleküle von grundlegender Bedeutung.

Über den neuesten Stand der Störungstheorie hat Kato am Mathematikerkongress in Nice 1970 einen äusserst interessanten Vortrag gehalten.

Schlussbetrachtung

Jeder Zweig der Mathematik kann als logisches System für sich allein bestehen. Wenn man aber die Mathematik als lebendige, wachsende Wissenschaft betrachtet, so kann man sie nur in der Symbiose mit der Physik und Astronomie verstehen. Nur in dieser Symbiose kann unsere geliebte Wissenschaft blühen und gedeihen und immer jung bleiben.

B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich