Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 27 (1972)

Heft: 3

Artikel: Über Fusspunktkurven auf einschaligen Hyperboloiden

Autor: Krames, Josef

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28629

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.	Band 27	Heft 3	Seiten 49-72	10. Mai 1972

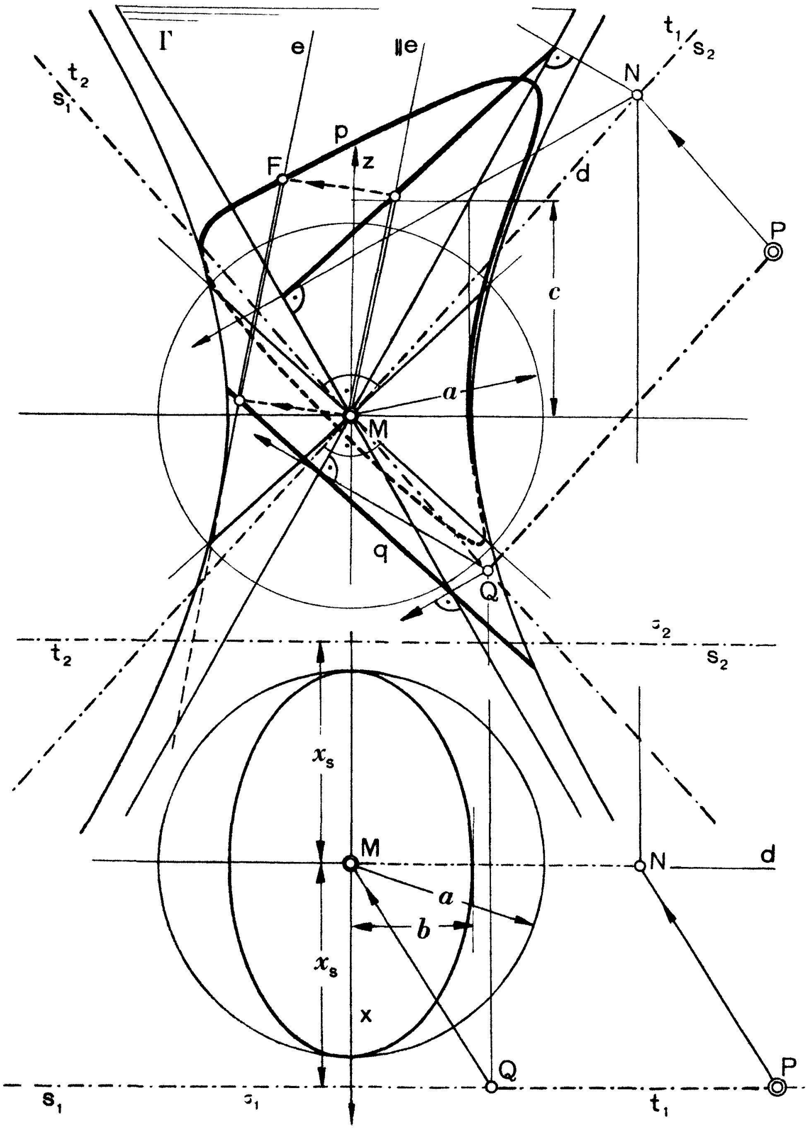
Über Fusspunktkurven auf einschaligen Hyperboloiden

Nr. 1. Die Fusspunktkurve einer Strahlfläche Σ für einen Pol P besteht bekanntlich aus den Fusspunkten der aus P auf die Erzeugenden von Σ gefällten Lote. Wir setzen voraus, dass Σ mindestens eine stetige Folge reeller Erzeugenden e besitzt. Zwischen den ∞^3 Fusspunktkurven von Σ besteht der einfache Zusammenhang, dass je drei von ihnen, sofern ihre Pole P, Q, R auf einer Raumgeraden g liegen, auf allen Flächenerzeugenden Punktetripel ausscheiden, deren Teilverhältnis gleich dem der Pole, also gleich $v = \mathsf{PR} : \mathsf{QR} = (\mathsf{PQR})$ ist (vgl. [3], Nr. 21, Satz 4).

Auf Grund dieser Tatsache hat bereits Vietoris [4] eine punktweise Konstruktion der auf einschaligen Hyperboloiden auftretenden Fusspunktkurven angegeben. Diese sind im allgemeinen *Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art*, die den absoluten Kegelschnitt i viermal schneiden. Liegt jedoch der Pol P auf einer der reellen Schnittgeraden s_1, s_2 und t_1, t_2 der durch die isotropen Flächenerzeugenden gelegten isotropen Ebenen, dann zerfällt die Fusspunktkurve in zwei dieser Erzeugenden und in einen einteiligen Kreisschnitt (*Fusspunktkreis*) des betrachteten Hyperboloides Δ. Diese Geraden s_1, t_1 und s_2, t_2, wir wollen sie kurz *Polachsen* nennen, sind normal zu den reellen zyklischen Ebenen der einen oder anderen Schar von Δ und projizieren sich im Normalriss auf eine dieser Ebenen in die reellen Brennpunkte des scheinbaren Umrisses von Δ. Wird für die Halbachsenlängen von Δ vorausgesetzt $a^2 > b^2 > 0$, $c^2 < 0$, dann schneiden die vier Polachsen die Hauptachse x der Kehlellipse von Δ im Abstand

$$x_s = \pm \frac{1}{a} \sqrt{a^2 (a^2 - b^2 - c^2) + b^2 c^2} \tag{1}$$

von der Flächenmitte rechtwinklig. In Figur 1 ist Δ im Grund- und Aufriss mit x normal zu Π_2 und mit der imaginären Flächenachse z normal zu Π_1 dargestellt. Dabei ist noch zu beachten, dass für die Flächenerzeugenden, die gegenüber z *rechts-* (bzw. *links-*)*gewunden* sind (wie Tangenten rechts- bzw. linksgängiger Schraublinien mit der Achse z) die zu den Fusspunktkreisen gehörigen Pole auf jenen paarweise windschiefen Polachsen s_1, s_2 (bzw. t_1, t_2) liegen, die gegenüber z *links*-(bzw. *rechts*-)-*gewunden* sind (vgl. [1], Fussnote 6). Für «orthogonale» Hyperboloide, für die $b^2 c^2 - a^2 b^2 - a^2 c^2 = 0$ gilt (vgl. etwa [2], Nr. 4, Gleichung 1), decken sich die vier Polachsen s_1, s_2, t_1, t_2 mit den die Achse x normal schneidenden Scheitelerzeugenden. Weiters ist für $(b^2 c^2 - a^2 b^2 - a^2 c^2) > 0$ – wie in unserer Figur – $x_s > a$.



Nr. 2. Um für einen Pol P allgemeiner Raumlage die Fusspunktkurve vierter Ordnung p eines einschaligen Hyperboloides Δ zu ermitteln, beispielsweise die auf den rechtsgewundenen Erzeugenden e bestimmte, lege man vorerst durch P die s_1 und s_2 in den Punkten Q und R treffende Transversale. Hierauf zeichne man die den Polen Q und R zugehörigen Fusspunktkreise q und r von Δ und suche auf verschiedenen Erzeugenden e dieser Schar jene Punkte F, die mit den Schnittpunkten von e mit q und r jeweils das Teilverhältnis $v = (Q\,R\,F)$ aufweisen. Damit ist die Kurve p Punkt für Punkt festgelegt.

Diese Konstruktion versagt jedoch, sobald der Pol P innerhalb einer der beiden Parallelebenen $\sigma_1 = s_1 \parallel s_2$, $\sigma_2 = s_2 \parallel s_1$ (jedoch ausserhalb von s_1 bzw. s_2) angenommen ist. Darnach wird nämlich einer der Pole Q, R zu einem Fernpunkt, und es ist $v = 0$ oder $= \infty$. Für solche besondere Lagen des Poles P wird nunmehr eine andere, ebenfalls einfache Konstruktion der Fusspunktkurve abgeleitet. Wir stützen uns dabei auf folgende Erwägungen:

a) Werden aus zwei Raumpunkten P und Q auf die Strahlen eines Parallelenbündels die Lote gefällt, dann begrenzen deren Fusspunkte auf allen Bündelstrahlen Strecken gleicher Länge und Richtung.

b) Diese Streckenlänge ändert sich nicht, wenn $P \rightarrow Q$ mittels einer Parallelverschiebung in eine andere Strecke $M \rightarrow N$ übergeführt wird.

c) Wird eine windschiefe oder abwickelbare Strahlfläche Σ durch ihren Richtkegel Γ mit beliebig angenommenem Scheitel ersetzt, oder durch eine andere Strahlfläche Ψ mit demselben Richtkegel, dann begrenzen die mit den Polen P und Q bzw. mit M und N gemäss **a)** und **b)** bestimmten Fusspunktkurven auf allen paarweise parallelen Erzeugenden von Γ, Σ oder Ψ jeweils (auch der Richtung nach) gleich lange Strecken.

Nr. 3. Mit Hilfe dieser Regeln wird die Fusspunktkurve p einer Erzeugendenschar, z.B. der rechtsgewundenen, eines einschaligen Hyperboloides Δ für einen etwa in der Ebene $\sigma_1 = s_1 \parallel s_2$ gelegenen Pol P wie folgt ermittelt (Figur):

a) Durch P wird die Parallele zu s_2 gelegt, ihr Schnittpunkt mit s_1 sei Q.

b) Die Strecke $P \rightarrow Q$ wird durch Parallelverschieben in eine Lage gebracht, bei der einer der Endpunkte, etwa Q, mit der Flächenmitte M, das ist der Scheitel des Asymptotenkegels, des Richtkegels Γ von Δ, zusammenfällt. P ist dabei in einen Punkt N auf dem zu s_2 parallelen Durchmesser d von Δ übergegangen (siehe Figur 1). Wie aus bekannten Eigenschaften der Flächen zweiten Grades hervorgeht, hat Γ für den Pol N einen seiner Kreisschnitte n zur Fusspunktkurve; hingegen ist die zu M gehörige Fusspunktkurve von Γ auf diesen Kegelscheitel zusammengeschrumpft.

c) Bezeichnet schliesslich q den Fusspunktkreis des Poles Q auf der betrachteten Erzeugendenschar von Δ, dann ergeben sich die Punkte F der gesuchten Kurve p, wenn *auf jeder Erzeugenden* e *dieser Schar von ihrem Schnittpunkt mit* q *aus, jene Strecke der Länge und Richtung nach übertragen wird, die auf der zu* e *jeweils parallelen Erzeugenden des Asymptotenkegels* Γ *zwischen* M *und* n *vorhanden ist.* In der Figur liegen die Aufrisse der Fusspunktkreise q und n auf (nicht parallelen) Geraden, womit die Kcnstruktion der Fusspunktkurve p sehr vereinfacht ist.

Nr. 4. Selbstverständlich könnte das soeben beschriebene Verfahren auch angewendet werden, wenn ein Pol P ausserhalb der Ebenen σ_1 und σ_2 gegeben ist. Man müsste in diesem allgemeinen Fall beispielsweise einen Punkt Q auf der Polachse s_1 auswählen, sodann die Strecke $P \rightarrow Q$ durch eine Parallelverschiebung mit dem Anfangspunkt in den Mittelpunkt M des Hyperboloides bringen und weiterhin wie oben beschrieben vorgehen. Da jedoch die neue Lage N des anderen Streckenendpunktes jetzt nicht mehr dem zu s_2 (oder s_1) parallelen Durchmesser von Δ angehören kann, ist n kein Kreisschnitt des Asymptotenkegels Γ, vielmehr eine *Raumkurve vierter Ordnung erster Art,* nämlich die *Schnittkurve von* Γ *mit der Hilfskugel vom Durchmesser* M N (vgl. [3], Fig. 71b). Da jeder Normalriss dieser Kurve mindestens die Ordnung 2 aufweist, ist für allgemeine Fusspunktkurven einschaliger Hyperboloide die in Nr. 2 beschriebene Konstruktion vorzuziehen.

Für Strahlflächen mit beliebigen Richtkegeln und für Untersuchungen von besonderen Fusspunktkurven kann das zweite Verfahren immerhin gelegentlich von Nutzen sein.

Josef Krames, Wien

LITERATUR

[1] J. KRAMES, *Zur Geometrie des Bennettschen Mechanismus, Über symmetrische Schrotungen V*, Sber. Akad. Wiss. Wien [math.-nat. IIa] *146*, 159–173 (1937).

[2] J. KRAMES, *Zur Ermittlung eines Objektes aus zwei Perspektiven*, Mh. Math. Phys. *49*, 327–354 (1941).

[3] E. MÜLLER – J. KRAMES, *Vorlesungen über darstellende Geometrie*, Band 3: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen* (Leipzig und Wien 1931), S. I–VIII, 1–298.

[4] L. VIETORIS, *Eine besondere Erzeugungsweise der Raumkurven vierter Ordnung zweiter Art*, Sber. Akad. Wiss. Wien [math.-nat. IIa] *125*, 259–283 (1916).

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Dandelin

Sei V ein K-Linksvektorraum vom Range n. Der Verband der Unterräume von V heisst projektiver Raum vom Range n über K, geschrieben $L(V)$. Unterräume vom Range 1 heissen Punkte, solche vom Range 2 heissen Gerade.

Dann gilt bekanntlich folgender Satz ([3], Theorem 4.2.1. Nach [1], 35, S. 62 wurde die eine Richtung dieses Satzes 1824 von Dandelin aufgezeigt):
$L(V)$ sei ein projektiver Raum vom Range n über K, $n = 4$. Genau dann gilt in $L(V)$ der Satz von Pappos, wenn folgendes gilt:
Sind a_1, a_2, a_3, a_4 Gerade von $L(V)$ mit der Eigenschaft, dass paarweise verschiedene stets den Durchschnitt $\{0\}$ besitzen, und b_1, b_2, b_3, b_4 Gerade von $L(V)$, von denen paarweise verschiedene ebenfalls den Durchschnitt $\{0\}$ besitzen, ist überdies $a_i \cap b_k \neq \{0\}$ für $i = 1, 2, 3, 4$, $k = 1, 2, 3, 4$, mit $(i, k) \neq (4, 4)$, dann folgt auch $a_4 \cap b_4 \neq \{0\}$.

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes soll als «verallgemeinerter Satz von Dandelin» bezeichnet und hier abgeleitet werden. Es ist möglich, die Beweise aus den Axiomen der projektiven Geometrie ohne Zuhilfenahme von Koordinaten zu führen. Da der Anmarschweg zu dieser Art von Beweisführung aber ziemlich lang ist, wollen wir hier zum Beweis lieber den zugrundeliegenden Vektorraum benutzen. Dabei ist der Satz von Hilbert zu beachten: Der Satz von Pappos ist äquivalent zur Kommutativität des Koordinatenkörpers (vgl. [3], Theorem 3.2.3. und 3.4.4.).

Wir gehen im folgenden stets von einem projektiven Raum $L = L(V)$ vom Range $m \cdot n$ aus mit $m > 1$ und $n > 1$.

Definition 1. Ein (m, n)-Rahmen von L ist eine Menge $\{M_0, M_1, \dots, M_n\}$ von Unterräumen von V, sämtlich vom Range m, für welche gilt:

$$\bigoplus_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} M_i = V \,, \quad j = 0, 1, \dots, n \,.$$