Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 27 (1972)
Heft: 2

Rubrik: Literaturüberschau

Literaturüberschau

Einführung in die operative Logik und Mathematik. Von PAUL LORENZEN. VIII und 298 Seiten. DM 54,–. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1969, 2. Auflage.

Mit der operativen Logik versucht P. Lorenzen einen Ausweg aus dem Streit zwischen Intuitionisten und Formalisten zu finden. Der erste Versuch dieser Art ist 1923 schon bei Skolem vorhanden, der die Grundlagen einer finiten – also von Intuitionisten und Formalisten anerkennbaren – Mathematik, insbesondere einer rekursiven Arithmetik, schaffte.

Die «Operative Mathematik» ist ein neuer Ansatz in dieser Richtung. Der methodische Rahmen wird dabei möglichst weit gelassen. Grundprinzip ist die Forderung nach «definiten» Aussagen, d. h. nach Aussagen, die durch schematische Operationen entscheidbar sind, und nach Aussagen, für die ein definiter Beweis- oder Widerlegungsbegriff festgelegt ist. Dabei werden im Gegensatz zu Skolem Quantoren nicht ausgeschlossen. Da hingegen die naive Mengenlehre gegen die Forderung der Definitheit verstösst, wird der Mengenbegriff durch den definiten Begriff von «Aussageform» ersetzt.

Im ersten Kapitel führt Lorenzen fünf «protologische Prinzipien» zur Beweisführung ein, auf denen sodann die operative Logik aufgebaut werden kann.

Im zweiten Kapitel folgt eine operative Begründung der Arithmetik, der Analysis sowie Sprachkonstruktionen, im Sinne der «konkreten» Mathematik.

Im dritten Kapitel wird im Sinne der «abstrakten» Mathematik der Versuch einer Einordnung der axiomatischen Methode in die operative Mathematik durchgeführt. Es wird die Auswirkung der Kritik an der naiven Mengenlehre in der Strukturtheorie der Algebra und der Topologie aufgezeigt. Dabei wird offensichtlich, dass das Ersetzen der naiv-mengentheoretischen Grundpfeiler durch bessere die bestehende Mathematik im wesentlichen unverändert lässt.

Der Aufbau des Buches ist übersichtlich und erfordert vom mathematisch geschulten Leser keine speziellen Kenntnisse. Die 2. Auflage weist im Vergleich zur ersten nur einige unwesentliche Änderungen in der Terminologie und Symbolik auf. P. FUCHS

Analytic Inequalities. Von D. S. MITRINOVIĆ, in Zusammenarbeit mit P. M. VASIĆ. XII und 400 Seiten. DM 88.–. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 165. Springer-Verlag Berlin–Heidelberg–New York 1970.

Inhalt: Preface. Organization of the book. On notations and definitions. 1. Introduction (reelle und komplexe Zahlen, monotone und konvexe Funktionen). 2. General inequalities (27 Klassen von Ungleichungen, insbesondere Ungleichungen zwischen Mittelwerten). 3. Particular inequalities (vor allem Ungleichungen, die besondere Funktionen betreffen, z. B. algebraische Funktionen, trigonometrische Funktionen, Exponential-, Logarithmus- und Gammafunktionen). Name Index. Subject Index.

Dieses Buch will zusammen mit den Werken von G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA (1934) und E. F. BECKENBACH, R. BELLMAN (1961) über Ungleichungen ein Ganzes bilden und bringt hauptsächlich Resultate, die bezüglich der beiden erstgenannten Werke neu sind. Es handelt sich hierbei sowohl um Zusätze zu klassischen Ungleichungen als auch um die Darstellung von Resultaten, die seit 1961 gefunden wurden und bisher zum Teil sogar noch unpubliziert waren. Aus Raumgründen musste auf die vollständig ausgeführten Beweise sehr oft verzichtet werden; doch scheint uns eine reiche bibliographische Ausstattung, wie sie hier zu finden ist, viel wichtiger zu sein. Es darf vielleicht auch vermerkt werden, dass ein ansehnlicher Beitrag des Materials aus den Aufgabenteilen verschiedener mathematischer Zeitschriften stammt. Kein Zweifel darüber, dass der Verfasser der Fachwelt mit dem vorliegenden Band ein nützliches Werkzeug in die Hand gegeben hat, das es ihr gestatten wird, Fortschritte auf dem Gebiet der Ungleichungen zu erzielen statt nur Neuentdeckungen zu machen. J. RÄTZ

Differential and Integral Inequalities. Von WOLFGANG WALTER. Ergebnisse der Mathematik Band 55. X und 352 Seiten mit 18 Figuren, DM 74.–. Springer-Verlag, Berlin 1970.

Das vorliegende Buch ist eine erweiterte Auflage des 1964 in deutscher Sprache erschienenen Werkes «Differential- und Integral-Ungleichungen» desselben Autors.

Ziel des Werkes ist es, Existenz und/oder Eindeutigkeit der Lösung einer Integral- bzw. gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichung zu beweisen. Dabei werden Bedingungen in Form von Ungleichungen vorausgesetzt, welche bei den Eindeutigkeitsbeweisen im wesentlichen Verallgemeinerungen der Lipschitzschen Bedingungen darstellen. Besonders auffallend ist die Ähnlichkeit der Methoden, mit deren Hilfe die verschiedenen Probleme gelöst werden, sowie die Unabhängigkeit zwischen Existenz- und Eindeutigkeitsproblemen.

In den Kapiteln I und III werden zuerst Volterrasche Integralgleichungen behandelt. Existenzbeweise werden mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes durchgeführt. Unter Monotoniebedingungen über den Integralkern wird die Existenz minimaler und maximaler Lösungen bewiesen. Bedingungen der Form $\| K\varphi - K\bar{\varphi} \| \leq \Omega\,(\| \varphi - \bar{\varphi} \|)$ (manchmal jedoch nur einseitige), wobei die Ungleichung $u > \Omega(u)$ grob gesagt beliebig kleine, jedoch durch vorgeschriebene positive Funktionen nach unten beschränkte Lösungen zulassen muss, erlauben Abschätzungen zwischen genauen und approximierten Lösungen der Gleichung $u = g + Ku$ und führen schliesslich zu Eindeutigkeitssätzen. Die so gewonnenen Resultate werden in Kapitel I auf gewöhnliche, in Kapitel III auf hyperbolische Differentialgleichungen angewendet. In Kapitel II wird allerdings die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auch direkt entwickelt (d. h. ohne Transformation auf Integralgleichungen). In Kapitel IV werden zuerst Eindeutigkeitssätze für parabolische Differentialgleichungen auf ähnliche Weise bewiesen. Die Existenzbeweise erfolgen hier aufgrund der sog. «Linienmethode». Dabei wird die *räumliche* Variable zuerst diskretisiert (d. h. es werden Punkte der Form $x_i = x_0 + ih$ betrachtet), worauf das entsprechende System von gewöhnlichen Differentialgleichungen gelöst wird. Unter geeigneten Bedingungen konvergiert die so gefundene Lösung, falls h gegen Null strebt, gegen eine Lösung der parabolischen Gleichung.

Im Anhang werden noch Resultate über elliptische Differentialgleichungen erwähnt. Das Werk schliesst mit einem sehr umfangreichen Literaturverzeichnis.

Obwohl das Buch nur elementare Analysiskenntnisse voraussetzt, ist es wegen der angestrebten Allgemeinheit der Sätze und der dadurch notwendig gewordenen Anzahl von Definitionen recht schwierig zu lesen. Dem Nichtspezialisten werden der intuitive Inhalt der Aussagen und die Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten nur sehr langsam ersichtlich. Jedoch kann das Buch all denjenigen empfohlen werden, die einen tieferen Einblick in den Mechanismus der Differentialrechnungen gewinnen möchten. H. CARNAL

Functional Analysis and Related Fields. Proceedings of a Conference in honor of Professor Marshall Stone, held at the University of Chicago, May 1968. Edited by FELIX E. BROWDER. VIII und 241 Seiten. DM 58.–. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

Der vorliegende Band enthält einige der an der Tagung gehaltenen Vorträge, in denen, teils auch rückblickend, über die Entwicklung der betreffenden Gebiete bis in die allerjüngste Zeit berichtet wird. Die Lektüre ist sehr anregend, und der an einzelnen Sachfragen weiter interessierte Leser wird durch zahlreiche Literaturzitate auf die zuständigen Originalarbeiten hingewiesen.

Inhalt: F. E. BROWDER: Nonlinear Eigenvalue Problems and Group Invariance. S. S. CHERN, M. DO CARMO, and S. KOBAYASHI: Minimal Submanifolds of a Sphere with Second Fundamental Form of Constant Length. HARISH-CHANDRA: Eisenstein Series over Finite Fields. E. HEWITT: L_p Transforms on Compact Groups. T. KATO and S. T. KURODA: Theory of Simple Scattering and Eigenfunction Expansions. G. W. MACKEY: Induced Representations of Locally Compact Groups and Applications. L. NACHBIN: Convolution Operators in Spaces of Nuclearly Entire Functions on a Banach Space. E. NELSON: Operants: A Functional Calculus for Non-Commuting Operators. I. SEGAL: Local Non-Linear Functions of Quantum Fields. A. WEIL: On the Analogue of the Modular Group in Characteristic p. A. ZYGMUND: A Theorem on the Formal Multiplication of Trigonometric Series. S. MACLANE: The Influence of M. H. STONE on the Origins of Category Theory. Remarks of Professor STONE. J. RÄTZ

Leopold Fejér, Gesammelte Arbeiten. Im Auftrag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben und mit Kommentaren versehen von P. TURÁN. Band I: 872 Seiten. Band II: 850 Seiten. Zusammen sFr. 196.–. Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart 1970.

Die 103 publizierten wissenschaftlichen Arbeiten Leopold Fejérs (1880–1959) werden in chronologischer Reihenfolge dargeboten, und zwar die deutsch, französisch oder englisch geschriebenen in der Originalsprache und die ungarisch geschriebenen zusätzlich mit einer deutschen Übersetzung. Der unpublizierte Nachlass Fejérs konnte indessen in diesem Werk nicht berücksichtigt werden.

Schon der biographische Aufsatz am Anfang des ersten Bandes bringt in faszinierender Weise zum Ausdruck, welch umwälzenden Einfluss die Ideen des zwanzigjährigen Fejér auf die Theorie der trigonometrischen Reihen hatten: Die Betrachtung der $(C,1)$-Summierbarkeit statt der Konvergenz brachte einerseits der Theorie den um die Jahrhundertwende dringend benötigten Aufschwung und führte andererseits die $(C,1)$-Summierbarkeit einer ihrer bedeutungsvollsten Anwendungen zu. Bei aller thematischen Breite seines gesamten Werkes lässt ein Blick auf die Titel von Fejérs Arbeiten erkennen, dass immer und immer wieder die «trigonometrische Analysis» seine Aufmerksamkeit auf sich zog.

Die «Bemerkungen» des Herausgebers – jeweilen auf einzelne oder auch auf Sequenzen von untereinander verwandten Arbeiten folgend – sind dazu bestimmt, die Resultate Fejérs in allgemeine Zusammenhänge einzuordnen. Eine derartige von profunden Kenntnissen des Herausgebers getragene kommentierte Ausgabe eines Gesamtwerkes darf wohl als ideale Form der Darstellung bezeichnet werden. J. Rätz

Geometry of Numbers. Von G. C. Lekkerkerker. 520 Seiten. Hfl. 90.–. North Holland Publishing Co. Amsterdam 1969.

This is an extensive, up to date survey of the geometry of numbers. After a chapter devoted to prerequisites, Chapter 2 starts with Minkowski's theorem on the lattice points in a convex body, and proceeds to discuss problems related to the homogeneous minimum of a convex body with respect to the lattice of points with integer coordinates. In Chapter 3, the author considers Mahler's selection theorem, the Minkowski-Hlawka theorem, and several packing and covering problems. Chapter 4 is devoted to a discussion of star bodies, following the ideas of Mahler and using the selection theorem of Chapter 3. Chapter 5 treats a number of methods for evaluating, or producing lower estimates of the critical determinant of sets in R^n. After exposing Mahler's method for star bodies in R^2, and then Mordell's method, the case $n = 3$ is treated by Minkowski's method. For star bodies of dimension $n > 3$, estimates are obtained by Blichfeldt's method, and extensions of it due to other writers. The last two chapters are devoted to problems of an arithmetical nature. Chapter 6 is concerned with problems arising from the determination of the absolute homogeneous minima of forms in several variables. Many related questions are discussed, in particular problems on products and sums of powers of linear forms. The chapter ends with applications to diophantine approximation. Inhomogeneous minima are the topic of Chapter 7, again with applications to diophantine approximation. There is a very complete bibliography covering the period between 1935 (where Koksma's book leaves off) and 1965. The numbering of references is conveniently arranged to indicate the section in which they are mentioned.

This is a very valuable introduction to the geometry of numbers. The amount of material covered is very generous; the main results are all proved in the text, and the reader is occasionally referred to other books, or to the original papers, for further details. The mathematicians interested in the geometry of numbers (from a geometric point of view) will be grateful to Lekkerkerker for his effort in writing such a useful book. J. Steinig

Arithmetical Functions. Von K. Chandrasekharan. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 167. XI und 231 Seiten. DM 58.–. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

Das vorliegende Werk, das aus Vorlesungen am Forschungsinstitut für Mathematik der ETH Zürich hervorgegangen ist, kann als Fortsetzung der «Introduction to Analytic Number Theory» des Verfassers (vgl. die Besprechung in El. Math. *25*, 19 (1970)) betrachtet werden.

Im 1. Kapitel wird durch Kombination der Methoden von Selberg und Wirsing ein «elementarer» Beweis des Primzahlsatzes (ohne Restglied) gegeben. Das 2. Kapitel enthält die Grundzüge der Theorie der Riemannschen Zetafunktion (Funktionalgleichung, Formel von Riemann-von Mangoldt, Sätze von Hardy und Hamburger). Gegenstand des 3. Kapitels sind die Methoden von Hardy-Littlewood und Weyl, die zur Abschätzung des Restgliedes im Primzahlsatz führen. I. M. Vinogradov hat die Weylsche Methode der Abschätzung von Exponentialsummen (Weylsche Summen) wesentlich verbessert und damit ein auf viele Probleme der Zahlentheorie anwendbares, äusserst kräftiges Hilfsmittel geschaffen. Darüber berichtet das 4. Kapitel. Als Anwendung ergeben sich Verschärfungen von Resultaten des 3. Kapitels. Das 5. Kapitel ist den Sätzen von Hoheisel und Ingham über die Abschätzung der Differenz konsekutiver Primzahlen gewidmet. Im 6. Kapitel werden die Dirichletschen L-Funktionen $L(s, \chi)$ betrachtet. Das Hauptresultat ist der Satz von Siegel über die Nichtexistenz von Nullstellen von $L(s, \chi)$ auf der reellen Achse zwischen $1 - k^{-\varepsilon}$ und 1, wenn χ ein reeller Charakter (nicht der Hauptcharakter) mod k ist. Den Inhalt des 7. Kapitels bilden Sätze von Hardy-Ramanujan und Rademacher über die Anzahl $p(n)$ der Zerfällungen der positiven ganzen Zahl n. Der Beweis von Ergebnissen von Voronoi, Hardy und Ingham zum Dirichletschen Teilerproblem wird im letzten Kapitel mit einer Methode des Verfassers (zusammen mit R. Narasimhan) geführt, die zur Erweiterung dieser Resultate auf andere arithmetische Funktionen entwickelt wurde. Die jedem Kapitel beigegebenen «Bemerkungen» enthalten ausführliche Literaturhinweise und wertvolle über den Text hinausgehende Informationen. E. TROST

Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik. Von KURT SCHÜTTE. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete Bd. 42. VIII und 87 Seiten. DM 26.–. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1968.

Als Grundlage für seine Arbeit benützt K. Schütte Arbeiten von S. A. Kripke, der für viele Systeme der Modalitätenlogik eine einheitliche Systematik für deren vollständige Interpretation geschaffen hat. Kripke führt seine Semantik der Modalitätenlogik über eine quantorenlogische Erweiterung des Modalitätensystems S4 von Lewis zur Semantik für intuitionistische Prädikatenlogik.

Abgesehen vom letzten Kapitel behandelt K. Schütte zur Hauptsache zwei Modalitätensysteme, nämlich das System M von G. H. von Wright und das System S4 von C. I. Lewis.

Diese Systeme werden zunächst als prädikatenlogische Erweiterungen M* und S4* im Rahmen der klassischen Logik behandelt. Daraus entstehen quantorenlogische Erweiterungen M′ und S4′. Es folgt ein konstruktiver Vollständigkeitsbeweis für die Kripke-Semantik dieser Systeme sowie ein einfacher, jedoch weniger konstruktiver Beweis in Anlehnung an die Methode von Henkin.

Die intuitionistische Prädikatenlogik lässt sich nun in das quantorenlogische Modalitätensystem S4′ so einbetten, dass die Semantik von S4′ zur Kripke-Semantik der intuitionistischen Prädikatenlogik führt.

Im letzten Kapitel wird die Kripke-Semantik unter Beschränkung auf die Aussagenlogik neben den Systemen M und S4 auch noch für die prädikatenlogischen Modalitätensysteme Br und S5 entwickelt.

Das Buch wird nur Leser interessieren, die in die Grundlagen der Logik eingeführt sind. Insbesondere erfordert es Kenntnisse in der klassischen sowie der intuitionistischen Prädikatenlogik. P. FUCHS

Computer Science: A Primer. Von A. I. FORSYTHE, TH. A. KEENAN, E. I. ORGANICK und W. STENBERG. XVII und 403 Seiten. 70 s. John Wiley & Sons, Inc., New York 1969.

Dieses Buch ist gut geeignet für einen Grundkurs über den Computer. Es kann von der 3. oder 4. Klasse eines Gymnasiums an ohne weiteres verwendet werden. Für gewisse Aufgaben des Anwendungsteils werden Polynome und trigonometrische Funktionen als bekannt vorausgesetzt. Die betreffenden Kapitel können auf eine spätere Klasse verschoben werden. Der Stoff ist nicht auf einen besonderen Computertyp ausgerichtet. Zwar wird ein einfacher hypothetischer Computer, dessen Struktur im Anhang beschrieben ist, gelegentlich verwendet. Ebensogut kann aber ein Manual eines vorhandenen Computers als Ergänzung zum Buch benutzt werden.

Das Buch ist herausgewachsen aus einem SMSG-Text (School Mathematics Study Group), der 1966 erschienen ist mit dem Titel: *Algorithms, Computation and Mathematics.* Dieser Titel deutet besser an, dass die Verfasser den Unterricht über den Computer nicht als isoliert betrachten wollen, sondern ihn eingliedern möchten in den systematischen Mathematikaufbau. Sie wenden sich also nicht nur an zukünftige Programmierer, sondern möchten es jedem Studenten ermöglichen, den Computer als Werkzeug kennenzulernen. E. R. BRÄNDLI

Groupes Algébriques. Von M. DEMAZURE und P. GABRIEL. Tome I. XXVI+700 Seiten. Masson & Cie., Paris 1970.

Das Buch beginnt mit der Definition 1.1, die wie folgt lautet: Ein geometrischer Raum $E = (X, O_X)$ besteht aus einem topologischen Raum X zusammen mit einer Ringgarbe O_X derart, dass für jedes x in X der Halm $O_{X,x}$ von O_X in x ein lokaler Ring ist.

Damit ist bereits angedeutet, auf welchem Niveau sich das 700 Seiten umfassende Werk bewegt. Es beinhaltet im wesentlichen die Untersuchung algebraischer Gruppen mit Hilfe der Theorie der Gruppenschemas. Die einzelnen Kapitel sind: I. Einführung in die algebraische Geometrie; II. Algebraische Gruppen; III. Anwendungen der Garbentheorie auf die Theorie der algebraischen Gruppen; IV. Affine kommutative, nilpotente, auflösbare Gruppen. Ein Anhang von M. Hazewinkel bringt lokale Klassenkörpertheorie. Das erste Kapitel ist eine Einführung in die Theorie der Schemas für «Nicht-Spezialisten», wobei man sich allerdings frägt, welche Vorstellungen die beiden Autoren von dieser Spezies haben. P. WILKER

Stochastic Convergence. Von EUGENE LUKACS. X und 142 Seiten. $6.95. Heath Mathematical Monographs. Raytheon Education Company, 1968.

Hauptgegenstand sind unendlich abzählbare Folgen von Zufallsvariablen (Z. V.) und ihre Konvergenz. Die wichtigsten nicht äquivalenten Konvergenzarten werden im 2. Kapitel eingeführt, nämlich:

a) Fast sichere Konvergenz
b) Konvergenz in Wahrscheinlichkeit
c) Konvergenz im quadratischen Mittel
d) schwache Konvergenz von Verteilungsfunktionen

Die erforderlichen wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen werden einleitend in Kürze zusammengestellt.

Gewisse Mengen von Zufallsvariablen bilden einen metrischen Raum. Unter welchen Voraussetzungen ist eine Metrik mit einer gewissen Konvergenzart verträglich? In Kapitel III wird u. a. bewiesen, dass im allgemeinen fast sichere Konvergenz mit einer Metrik unverträglich ist.

Im Kapitel IV stehen unendliche Reihen von Z.V. zur Diskussion (starkes Gesetz der grossen Zahlen, Satz vom iterierten Logarithmus usw.).

Einige fundamentale Begriffe im Zusammenhang mit stochastischen Prozessen (stochastische Integrale, Differentiation) werden im Abschnitt V behandelt.

Interessante Charakterisierungen der Normalverteilung (durch Eigenschaften unendlicher Summen von Z.V.) einerseits und des sog. Wienerprozesses (durch Eigenschaften stochastischer Integrale) andererseits beschliessen das rund 140 Seiten umfassende Buch.

Auf diesem knappen Raum wird ein zentraler Problemkreis moderner Wahrscheinlichkeitstheorie erschöpfend dargeboten. Die straffe Gliederung und die logische Transparenz wirken wohltuend. HANS LOEFFEL

Mitteilung

IMUK-Kongress 1972

Die nationale Subkommission der IMUK für England führt in der Zeit vom 29. 8. bis 2. 9. 1972 in Exeter einen 'International Congress on Mathematical Education' durch. Der Besuch der Tagung dürfte vor allem für Mathematik-Lehrer von Interesse sein. Nähere Auskünfte können unter folgender Adresse angefordert werden:

The Honorary Secretary ICMI-Congress, Department of Education, University of Exeter, New North Road, *Exeter EX4 4JZ*, Devon, England.