

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 27 (1972)  
**Heft:** 2  
  
**Rubrik:** Aufgaben

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Indeed, if  $x \in X$ , let  $R(x) = \{y \mid (x, y) \in R\}$ , and set  $B = \{R(x) \mid x \in X\}$ . By the axiom of choice there is a function  $f: X \rightarrow \cup B$  such that  $f(x) \in R(x)$  for each  $x \in X$ ; clearly,  $f \in F$ . Let  $U$  denote the union of the functions in  $F$ . Then  $U \subset R$ . Assume that there is an element  $(x, y)$  in  $R$  which is not in  $U$ . Let  $f \in F$ . Then  $(x, y) \notin f$ . Since  $f$  is a function with domain  $X$  there is a unique  $z \in X$  such that  $(x, z) \in f \subset R$ . Define a new function  $g$  from  $f$  by replacing the element  $(x, z)$  in  $f$  by the original element  $(x, y)$ . Since  $f \subset R$  and  $(x, y) \in R$  we have  $g \subset R$ ; that is,  $g \in F$ . It follows that  $(x, y) \in g \subset U$ , contrary to the way that  $(x, y)$  was chosen. The proof is now complete.

It is easy to see that the axiom of choice is a consequence of the theorem. In fact, if  $E = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$  is a nonempty family of nonempty sets, let  $R$  be the relation from  $A$  into  $\cup E$  given by  $R = \{(\alpha, x_\alpha) \mid \alpha \in A, x_\alpha \in X_\alpha\}$ . By the theorem there is a function  $f \subset R$  such that  $f(\alpha) \in X_\alpha$  for each  $\alpha \in A$ , i.e.,  $f$  is a choice function. Hence, the theorem and the axiom of choice are equivalent.

R. S. Doran, Texas Christian University, USA

## Aufgaben

**Aufgabe 642.** Am ebenen Dreieck mit Seiten  $abc$ , Inradius  $r$ , Umradius  $R$  und Flächeninhalt  $rs$  beweise man die Verschärfung

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 + k[r s \sqrt{3} + (4 - 2\sqrt{3}) r (R - 2r)] \leq \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 & \text{für } k = 4 \\ (a+b+c)^2/2 & \text{für } k = 6 \end{cases}$$

zweier Ungleichungen von H. Hadwiger, JBer. DMV 49, 2. Abt. S. 35–39.

I. Paasche, München

*Solution:* Since

$$\begin{aligned} & 3[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 - a^2 - b^2 - c^2] \\ &= 2 \left[ (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 - \frac{1}{2} (a+b+c)^2 \right] \end{aligned}$$

the two stated inequalities are equivalent. It accordingly suffices to prove the first.

For  $k = 4$  we have to prove

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4rs\sqrt{3} + 4(4 - 2\sqrt{3})r(R - 2r) \leq 2(bc + ca + ab), \quad (*)$$

or what is the same thing,

$$(a+b+c)^2 + 4rs\sqrt{3} + 4(4 - 2\sqrt{3})r(R - 2r) \leq 4(bc + ca + ab).$$

Since

$$bc + ca + ab = s^2 + 4Rr + r^2,$$

this reduces to

$$rs\sqrt{3} + (4 - 2\sqrt{3})r(R - 2r) \leq 4Rr + r^2,$$

or

$$s \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r. \quad (**)$$

This inequality has been proved by W. J. Blundon (Canadian Math. Bulletin 8(1965), 615–626). Moreover (\*\*) holds if and only if the triangle is equilateral. Hence the same is true of (\*).

L. Carlitz, Durham, N. C., USA

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), M. Majić (Zagreb, Jugoslawien) und K. Schuler (Rottweil, BRD).

**Aufgabe 643.** Man beweise, dass für  $n \geq 2$  die Ebene durch ein vollständiges  $n$ -Eck in allgemeiner Lage in

$$\frac{1}{8} \cdot (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 26n + 8)$$

Gebiete zerlegt wird.

A. Dreiding und P. Hohler, Zürich

1. *Lösung:* Die fragliche Anzahl von Gebieten sei mit  $A_n$  bezeichnet. Die angegebene Formel ist offenbar für  $n = 2$  richtig. Wir betrachten alsdann ein vollständiges  $(n + 1)$ -Eck in allgemeiner Lage. Es entsteht aus dem vollständigen  $n$ -Eck  $P_1, \dots, P_n$  durch Hinzufügen des Punktes  $P_{n+1}$  und der  $n$  Geraden  $P_k P_{n+1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Jede dieser Geraden liefert offenbar

$$\binom{n}{2} - (n - 1)$$

neue Schnittpunkte und somit

$$\binom{n}{2} - (n - 1) + 1 = \frac{n^2 - 3n + 4}{2}$$

neue Gebiete. Das ergibt zunächst einen Gesamtzuwachs von

$$\frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2}$$

Gebieten, welche nicht den Eckpunkt  $P_{n+1}$  besitzen. Ferner haben wir offenbar  $2n$  Gebiete mit dem gemeinsamen Eckpunkt  $P_{n+1}$ , also einen Zuwachs um  $2n - 1$  Gebiete. Somit gilt

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A_n + \frac{n^3 - 3n^2 + 4n}{2} + 2n - 1 \\ &= A_n + \frac{n^3 - 3n^2 + 8n - 2}{2}, \end{aligned}$$

womit sich die behauptete Formel in einfacher Weise durch Induktion ergibt.

H. Kappus, Bottmingen BL

2. *Lösung:* Durch  $m$  Geraden in allgemeiner Lage wird die Ebene in

$$s(m) = \frac{1}{2} (m^2 + m + 2)$$

Gebiete zerlegt, da  $s(m+1) = s(m) + (m+1)$ ,  $s_0 = 1$ .

Von diesen  $s(m)$  Gebieten sind  $a(m) = 2m$  unbeschränkt und

$$j(m) = \frac{1}{2} (m^2 - 3m + 2)$$

beschränkt. Sind die  $m$  Geraden nicht in allgemeiner Lage, sondern gibt es genau  $r$  Punkte  $P_1, \dots, P_r$ , durch die mehr als zwei Geraden hindurchgehen, und zwar durch  $P_q$   $g_q$  Geraden ( $q = 1, \dots, r$ ), dann wird die Ebene in

$$z = s(m) - \sum_{q=1}^r j(g_q)$$

Gebiete zerlegt.

Im speziellen Fall der Aufgabe ist

$$m = \binom{n}{2}, \quad r = n, \quad g_q = n-1,$$

also

$$\begin{aligned} z &= s \left[ \binom{n}{2} \right] - n j(n-1) = \frac{1}{2} \left[ \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{2} + 2 \right] \\ &\quad - n \frac{1}{2} \left[ (n-1)^2 - 3(n-1) + 2 \right] = \frac{1}{8} (n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 26n + 8). \end{aligned}$$

H. Wimmer, Graz, Österreich

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH; zwei Lösungen), H. Frischknecht (Berneck SG), H. Harborth (Braunschweig, BRD), I. Paasche (München; zwei Lösungen), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD) und W. R. Umbach (Rottorf, BRD).

**Aufgabe 644.** Im Dreieck  $ABC$  sei  $\beta \leq \gamma$ , wobei  $B$  bzw.  $C$  den Scheitel von  $\beta$  bzw.  $\gamma$  bezeichnet. Wählt man  $X \in \overline{AB}$  und  $Y \in \overline{AC}$  so, dass  $\sphericalangle XCB = \lambda\gamma$  und  $\sphericalangle YBC = \lambda\beta$  mit  $0 < \lambda \leq 1$ , so gilt  $CX \leq BY$  mit Gleichheit genau für  $\beta = \gamma$ . Man beweise diese Behauptung. P. Erdős, Budapest

*Solution:* Let us compare the angles  $CXB$  and  $CYB$ .

$$\sphericalangle CXB = \alpha + (1 - \lambda)\gamma \geq \sphericalangle CYB = \alpha + (1 - \lambda)\beta.$$

Therefore the circle passing through  $C, X, B$  will cut  $BY$  in point  $Z$  of the triangle. Now the angle in the circle standing on  $BZ$  is

$$\lambda\gamma + \sphericalangle ZCX = \lambda\gamma + \sphericalangle ZBX = \lambda\gamma + (1 - \lambda)\beta \geq \beta.$$

This means that

$$CX \leq BZ \leq BY,$$

with equality holding if and only if  $\beta = \gamma$ .

E. Szekeres, Sydney, Australia

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Bottmingen BL), F. Leuenberger (Feldmeilen ZH), M. Majić (Zagreb, Jugoslawien), H. Meyer (Birkerød, Dänemark), K. Schuler (Rottweil, BRD), J. Steinig (Urbana, Illinois, USA) und H. Wimmer (Graz, Österreich).

**Aufgabe 645.** Let  $p$  be a fixed prime and  $a, b, s, k$  nonnegative integers. Let  $E(a, b)$  denote the largest value of  $k$  such that  $p^k \mid \binom{a+b}{a}$  and let  $E'(a, b)$  denote the largest value of  $k$  such that

$$p^k \mid (a+b+1) \binom{a+b}{a}.$$

Show that

$$E(a, b) + E'(p^s - a - 1, p^s - b - 1) = s,$$

provided

$$0 \leq a < p^s; \quad 0 \leq b < p^s.$$

L. Carlitz, Duke University, USA

*Lösung:*

$$\begin{aligned} E &= E(a, b) + E'(p^s - a - 1, p^s - b - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left( \left[ \frac{a+b}{p^i} \right] - \left[ \frac{a}{p^i} \right] - \left[ \frac{b}{p^i} \right] + \left[ \frac{2p^s - a - b - 1}{p^i} \right] - \left[ \frac{p^s - a - 1}{p^i} \right] - \left[ \frac{p^s - b - 1}{p^i} \right] \right) \\ &= \sum_{i=1}^s \left( \left[ \frac{2p^s - (a+b) - 1}{p^i} \right] + \left[ \frac{a+b}{p^i} \right] \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{s-1} \left( \left[ \frac{p^s - a - 1}{p^i} \right] + \left[ \frac{a}{p^i} \right] + \left[ \frac{p^s - b - 1}{p^i} \right] + \left[ \frac{b}{p^i} \right] \right), \end{aligned}$$

denn wegen  $0 \leq a < p^s$  und  $0 \leq b < p^s$ , sowie  $a+b < 2p^s$  und  $2p^s - a - b - 1 \leq 2p^s - 1$  verschwinden in der ersten Summe von  $i = s+1$  an und in der zweiten Summe von  $i = s$  an alle Summanden.

Weiter ist mit  $x = v p^i + r$ ;  $0 \leq r \leq p^i - 1$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\alpha p^s - x - 1}{p^i} \right] + \left[ \frac{x}{p^i} \right] &= \left[ \frac{\alpha p^s - (v+1)p^i + p^i - (r+1)}{p^i} \right] + v \\ &= \alpha p^{s-i} - (v+1) + \left[ \frac{p^i - (r+1)}{p^i} \right] + v \\ &= \begin{cases} p^{s-i} - 1 & \text{für } i = 1, 2, \dots, s-1 \text{ und } x = a, b \\ 2p^{s-i} - 1 & \text{für } i = 1, 2, \dots, s \text{ und } x = a+b, \end{cases} \end{aligned}$$

denn wegen

$$0 \leq p^i - (r+1) \leq p^i - 1 \text{ ist } \left[ \frac{p^i - (r+1)}{p^i} \right] = 0.$$

Also folgt:

$$E = \sum_{i=1}^{s-1} (2p^{s-i} - 1) + 1 - 2 \sum_{i=1}^{s-1} (p^{s-i} - 1) = -(s-1) + 1 + 2(s-1) = s.$$

W.-R. Umbach, Röttorf, BRD

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), J. Fehér (Pécs, Ungarn) und H. Harborth (Braunschweig, BRD).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. November 1972**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

**Aufgabe 665.** Für nichtnegative ganze Zahlen  $n$  beweise man die Formel

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1.$$

I. Paasche, München

**Aufgabe 666.** Sei  $V$  ein Rechts- $K$ -Vektorraum vom Range 4. Der Verband der Unterräume von  $V$  heisst projektiver Raum vom Range 4 über  $K$ , geschrieben  $L(V)$ .

$(Q_4)$  bezeichne folgenden Schliessungssatz:

$A, B, C, D$  seien Punkte von  $L(V)$  mit  $V = A \oplus B \oplus C \oplus D$ . Sei  $a = A + B$ ,  $b = B + C$ ,  $c = C + D$ ,  $d = D + A$ .  $P_i$  seien Punkte von  $a$ ,  $Q_i$  seien Punkte von  $c$  für  $i = 1, 2, 3$ , welche von  $A, B, C, D$  verschieden sind. Gibt es dann zwei Geraden  $g_{12}$  und  $g_{23}$ , die von  $a, b$  verschieden sind, mit der Eigenschaft:  $g_{jk}$  trifft zugleich die vier Geraden  $b, d, P_j + Q_k, P_k + Q_j$  für  $(j, k) = (1, 2), (2, 3)$ , so gilt für jede Gerade  $g_{13}$ , welche zugleich die Geraden  $b, d$  und  $P_1 + Q_3$  trifft:

$$g_{13} \cap (P_3 + Q_1) \neq \{0\}.$$

Man beweise: Genau dann gilt in  $L(V)$  der Schliessungssatz  $(Q_4)$ , wenn in  $L(V)$  der Satz von Pappos gilt.

(Hinweis: Eine Lösung ohne Benutzung von Koordinaten ergibt sich unter Beachtung von Aufgabe 594).

A. Herzer, Wiesbaden, BRD

**Aufgabe 667.** Für jede reelle Zahl  $a$  sei  $\|a\| := \min \{ |a - n| ; n \in \mathbb{Z} \}$  ( $\mathbb{Z}$ : Menge der ganzzahligen Zahlen), und  $g$  bezeichne die «goldene Zahl»  $(\sqrt{5} + 1)/2$ . Man beweise, dass die Reihen

$$\sum \|g^n\|, \sum \|g^{2n}\|, \sum \|g^{3n}\|$$

konvergent sind und dass für ihre Summen gilt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \|g^n\| = 1, \sum_{n=0}^{\infty} \|g^{2n}\| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \|g^{3n}\|.$$

J.-P. Hornecker, Morangis, Essonne, France

**Aufgabe 668.** Im projektiven dreidimensionalen Raum  $P_3$  haben drei Flächen zweiter Ordnung,  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , die keine Kurve gemeinsam haben, acht Punkte gemein. Man beweise: Sind diese acht Punkte alle verschieden und liegen vier von ihnen in einer Ebene, so liegen auch die restlichen vier Punkte in einer Ebene.

H. Günther, Dresden, DDR