

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 27 (1972)  
**Heft:** 1  
  
**Rubrik:** Aufgaben

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Aufgaben

**Problem 629 A.** Für ein Dreieck mit den Seitenlängen  $a, b, c$  und dem Flächeninhalt  $F$  gilt  $F \leq (\sqrt{3}/4) (abc)^{2/3}$ . Wir vermuten, dass allgemein für das Hypervolumen  $V$  eines  $n$ -dimensionalen Simplexes  $A_1 A_2 \dots A_{n+1} \subset R^n$  gilt  $V \leq (1/n!) \sqrt{(n+1)/2^n} \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} a_{ij} \right)^{2/(n+1)}$ , wobei  $a_{ij}$  die Länge der die Eckpunkte  $A_i, A_j$  verbindenden Kante ist.

D. Veljan, Zagreb

*Beweis der Vermutung* (induktiv nach der Dimensionszahl): Die ausgesprochene Vermutung trifft für das Dreieck mit den Seitenlängen  $a, b, c$ , dem Flächeninhalt  $F$  und den Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  tatsächlich zu, wie sich aus den Beziehungen

$$F^3 = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \quad \text{und} \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \frac{3}{8} \sqrt{3}$$

leicht ergibt. Die Gleichheit trifft genau für das gleichseitige Dreieck zu.

Für den Induktionsschritt stützen wir uns auf zwei bekannte Forschungsergebnisse. Wir bezeichnen das zu untersuchende  $n$ -Simplex mit  $S$  und die Hypervolumina seiner  $(n-1)$ -dimensionalen Seitensimplices  $S_1, \dots, S_{n+1}$  mit  $V_1, \dots, V_{n+1}$ . Für jedes  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  sei  $e_i$  der zu  $S_i$  orthogonale nach aussen weisende Einheitsvektor. Für die konvexen Hüllen  $E_i$  der Vektormengen  $\{0, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_{n+1}\}$  gilt dann

$$i, j \in \{1, \dots, n+1\}; \quad i \neq j \Rightarrow \text{int } E_i \cap \text{int } E_j = \emptyset, \quad (1)$$

wobei  $\text{int } E_i$  die Menge der inneren Punkte von  $E_i$  bezeichnet. Steht  $W_i$  für das Hypervolumen von  $E_i$ , so gilt nach [1]:

$$i \in \{1, \dots, n+1\} \Rightarrow V = \frac{1}{n} [(n-1)! n! V_1 \dots V_{i-1} W_i V_{i+1} \dots V_{n+1}]^{1/(n-1)}. \quad (2)$$

Die Vereinigungsmenge  $E$  der Simplices  $E_1, \dots, E_{n+1}$  ist ein der Einheitskugel von  $R^n$  einbeschriebenes  $n$ -Simplex. Für das Hypervolumen  $W$  von  $E$  gilt daher nach [2], p. 291:

$$W \leq \frac{1}{n!} (n+1)^{(n+1)/2} n^{-n/2}, \quad (3)$$

mit Gleichheit genau für reguläres  $E$ . Aus (2) folgt die symmetrische Beziehung

$$V^{n+1} = n^{-n-1} [(n-1)!^{n+1} n!^{n+1} V_1^n \dots V_{n+1}^n W_1 \dots W_{n+1}]^{1/(n-1)}.$$

Wegen  $W_1 \dots W_{n+1} \leq [(n+1)^{-1} (W_1 + \dots + W_{n+1})]^{n+1}$  und (1) ergibt sich  $W_1 \dots W_{n+1} \leq (W/(n+1))^{n+1}$  und weiter nach (3)

$$V^{n+1} \leq n^{-n-1} [(n-1)!^{n+1} V_1^n \dots V_{n+1}^n (n+1)^{(n-1)(n+1)/2} n^{-n(n+1)/2}]^{1/(n-1)}.$$

Infolge der Induktionsannahme erhalten wir

$$V^{n+1} \leq n^{-n-1} [(n-1)!^{n+1-n(n+1)} (n+1)^{(n-1)(n+1)/2} \cdot 2^{-(n+1)n(n-1)/2}].$$

$$\cdot \left( \prod_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{n-1} 1^{1/(n-1)} = n!^{-n-1} \left( \frac{n+1}{2^n} \right)^{(n+1)/2} \cdot \prod_{i,j} a_{ij}^2,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Der Beweis zeigt auch, dass das Gleichheitszeichen genau für reguläre Simplices zutrifft.

#### LITERATUR

- [1] P. BARTOS, Sinusova veta o simplexoch v  $E_n$ . Casopis Pest. Mat. 93 (1968), 273–277.
- [2] L. FEJES TÓTH, Reguläre Figuren. Akadémiai kiadó, Budapest 1965.

G. Korchmáros, Budapest

*Anmerkung der Redaktion:* Für  $n = 3$  vgl. Aufgabe 583 (El. Math. 24 (1969) 116–117).

**Aufgabe 638.** Let  $p$  be a fixed prime and  $a, b, s$  nonnegative integers such that  $a + b < p^s$ . Show that the binomial coefficients

$$\binom{p^s - a - 1}{b}, \quad \binom{p^s - b - 1}{a}$$

are divisible by exactly the same power of  $p$ .

L. Carlitz, Duke University, USA

*Solution:* If  $a = b$  there is nothing to be proved. Hence we may suppose  $a > b$ . Since

$$\binom{p^s - a - 1}{b} = \frac{(p^s - a - 1)!}{(p^s - a - b - 1)! b!}$$

and

$$\binom{p^s - b - 1}{a} = \frac{(p^s - b - 1)!}{(p^s - a - b - 1)! a!}$$

we see that it is sufficient and necessary to prove that the products  $a(a-1) \dots (b+1)$  and  $(p^s - b - 1)(p^s - b - 2) \dots (p^s - a)$  are divisible by exactly the same power of  $p$  which is trivial because of the fact that  $a$  contains as many factors  $p$  as  $p^s - a$ ,  $a - 1$  contains as many factors  $p$  as  $p^s - a + 1$ , etc.

O. P. Lossers, Eindhoven, Netherlands

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), C. Bindschedler (Küschnacht ZH), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), H. Flanders (Tel Aviv), H. Harborth (Braunschweig), Edith V. Sloan (Greensboro, N.C., USA), W. R. Umbach (Rottorf, BRD) und R. W. van der Waall (Nijmegen, Niederlande).

**Aufgabe 639.** Es seien  $0_i$  die Mittelpunkte von vier Kreisen  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), die einander in einem Punkte  $P$  schneiden. Es seien weiter die sechs übrigen verschiedenen Schnittpunkte der Kreise  $k_i$  mit  $A_{ij}$  bezeichnet ( $A_{ij}$  der Schnittpunkt der Kreise  $k_i, k_j$ ). Es ist je eine die Mittelpunkte  $0_i$  betreffende notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, dass

- a) die Punkte  $A_{ij}$  die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits mit den Seiten  $a_i$  sind,
- b) die Seiten  $a_i$  des Vierseits ein Sehnenviereck bilden. J. Brejcha, Brno, CSSR

*Lösung zu a):* Gehen drei Kreise durch den Punkt  $P$  und sollen die anderen drei Schnittpunkte auf einer Geraden liegen, so müssen auch die drei Fußpunkte der Lote von  $P$  auf die Seiten des Mittelpunktdreiecks auf einer Geraden liegen. Dies ist nach dem Satz von Wallace genau dann der Fall, wenn  $P$  auf der Umkreislinie des Dreiecks der Mittelpunkte liegt. Es folgt nun leicht, dass die Zugehörigkeit von  $P, 0_1, 0_2, 0_3, 0_4$  zu einer und derselben Kreislinie eine Bedingung der gesuchten Art ist.

K. Schuler, Rottweil, BRD

*2. Lösung:* a) Durch Spiegelung (Inversion) an einem Kreis um  $P$  gehen die vier Kreise  $k_i$  in vier Geraden  $k'_i$  über, die einander in den sechs Punkten  $A'_{ij}$ , den Spiegelbildern von  $A_{ij}$  schneiden. Wenn jeweils drei Schnittpunkte  $A_{ij}$  auf einer Geraden (z. B.  $A_{23}, A_{24}, A_{34}$  aus  $a_1$ ) liegen, dann liegen die gespiegelten Punkte  $A'_{ij}$  auf einem durch  $P$  gehenden Kreis. Die Umkreise der aus je drei Parabeltangentialen gebildeten Dreiecke gehen bekanntlich durch den Parabelbrennpunkt  $P$ . Die Fußpunkte  $T'_i$  der vom Brennpunkt  $P$  auf die Tangenten  $k'_i$  der Parabel gefällten Lote liegen auf deren Scheiteltangente  $t'$ . Die den Punkten  $T'_i$  in der Inversion zugeordneten Punkte  $T_i$  liegen demnach auf einem durch  $P$  gehenden Kreis  $t$ . Da die Punkte  $T_i$  Gegenpunkte zu  $P$  auf den Kreisen  $k_i$  sind, liegen auch deren Mittelpunkte  $0_i$  auf einem durch  $P$  gehenden Kreis  $k$ . Damit ist gezeigt, dass die Kreise  $k_i$  nur dann die unter a) geforderte Eigenschaft besitzen, wenn die Kreismittelpunkte  $0_i$  auf einem durch  $P$  gehenden Kreis liegen.

b) Damit die Geraden  $a_i$  ein Sehnenviereck bilden, müssen vier von den sechs Punkten  $A_{ij}$  und ebenso die ihnen in der Inversion zugeordneten vier Punkte  $A'_{ij}$  jeweils auf einem Kreis liegen. Demnach müssen auch die Geraden  $k'_i$  ein Sehnenviereck bilden. Dies bedeutet, dass zwei Vierecksseiten  $k'_i$  einander unter denselben Winkeln schneiden wie die beiden übrigen Vierecksseiten  $k'_i$ . Demnach schliessen auch die von  $P$  auf die ersten beiden Geraden  $k'_i$  gefällten Lote denselben Winkel ein wie die von  $P$  auf die beiden übrigen Geraden  $k'_i$  gefällten Lote. Auf dem Kreis  $t$  begrenzen somit zwei Punkte  $T_i$  und die anderen beiden Punkte  $T_i$  gleichlange Bogenstücke. Entsprechend begrenzen auch auf dem Kreis  $k$  zwei Punkte  $0_i$  und die beiden anderen Punkte  $0_i$  gleichlange Bogenstücke. Es ergibt sich somit als notwendige und hinreichende Bedingung für die Eigenschaft b), dass mindestens eine Nebenecke des Sehnenvierecks  $0_10_20_30_4$  ein Fernpunkt ist. K. Grün, Linz, Donau, Österreich

**Aufgabe 640.** Am ebenen Dreieck mit Seiten  $a \leq b \leq c$  ( $a + b + c = 2s$ ), Inradius  $r$  und Umradius  $R$  zeige man

$$4Rr - r^2 \geq \left(\frac{s}{2}\right)^2 \text{ ist äquivalent mit } b + c \leq 3a, \quad (1)$$

$$2 R r - r^2 \stackrel{\geq}{\approx} \left( \frac{s}{3} \right)^2 \text{ ist äquivalent mit } c + a \stackrel{\geq}{\approx} 2 b . \quad (2)$$

I. Paasche, München

*Lösung:* Mit den Beziehungen

$$2s = a + b + c ,$$

$$Rr = abc/4s \quad \text{und}$$

$$r^2 = (s - a)(s - b)(s - c)/s$$

erhält man

$$\begin{aligned} 2 R r - r^2 - \frac{s^2}{9} &= \frac{1}{72s} \{ 36abc - 9(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &\quad - (a+b+c)^3 \} \\ &= -\frac{4}{72s} (-2a+b+c)(a-2b+c)(a+b-2c) . \end{aligned}$$

Wegen  $a \leq b \leq c$  ist auf der rechten Seite die erste Klammer nichtnegativ und die dritte nichtpositiv; jede dieser beiden Klammern verschwindet genau im Falle  $a = b = c$ . Nun lässt sich die zweite Behauptung direkt aus der vorigen Formel ablesen. Mit einer analogen Faktorisierung kann die erste Behauptung bewiesen werden.

P. Nüesch, Lausanne

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD), K. Schuler (Rottweil, BRD) und H. Wimmer (Graz, Österreich).

**Aufgabe 641.** Gesucht wird ein Beweis der folgenden einfachen Aussage kombinatorisch-geometrischer Art: Es seien  $n$  und  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) natürliche Zahlen, und  $K$  bezeichne eine Menge von  $n$  abgeschlossenen, nicht notwendig disjunkten Strecken einer Geraden  $G$ . Die Menge derjenigen Punkte von  $G$ , die wenigstens  $i$  verschiedenen Strecken von  $K$  angehören, zerfällt in endlich viele paarweise disjunkte und abgeschlossene Strecken; ihre Anzahl sei  $k_i$  ( $1 \leq k_i \leq n$ ). Es gilt dann die additive Formel

$$n = \sum_{i=1}^n k_i .$$

H. Hadwiger, Bern

1. *Lösung:* Statt  $K$ ,  $k_i$  schreiben wir  $K_n$ ,  $k_{i,n}$ . Für  $n = 1$  ist wegen  $i = 1$  und  $k_{1,1} = 1$  die Behauptung leicht einzusehen. Nun werde  $n > 1$  vorausgesetzt.

Seien  $s_m$  ( $1 \leq m < n$ ) abgeschlossene Strecken auf  $G$  und  $K_{n-1} = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ . Für  $i = 1, \dots, n-1$  seien  $S_{i,t}^{(n-1)}$  ( $1 \leq t \leq k_{i,n-1}$ ) die paarweise disjunkten und abgeschlossenen Strecken, in die die Menge derjenigen Punkte von  $G$  zerfällt, die wenigstens  $i$  Strecken von  $K_{n-1}$  angehören.

Nun geben wir uns  $K_n = K_{n-1} \cup \{s_n\}$  vor. Die Menge der Punkte von  $G$ , die sowohl  $s_n$  als auch einer der Strecken  $S_{i,t}^{(n-1)}$  ( $1 \leq t \leq k_{i,n-1}$ ) angehören, zerfalle

genau in  $j_{i,n-1}$  (paarweise disjunkte und abgeschlossene) Strecken. Wir behaupten nun

$$k_{i,n} = \left\{ \begin{array}{ll} k_{1,n-1} - j_{1,n-1} + 1 & \text{für } i = 1, \\ k_{i,n-1} - j_{i,n-1} + j_{i-1,n-1} & \text{für } 1 < i < n, \\ j_{n-1,n-1} & \text{für } i = n. \end{array} \right\} \quad (*)$$

Die erste Zeile ist klar, da die Menge der Punkte von  $G$ , die einer Strecke von  $K_n$  angehören, sich zusammensetzt aus der Menge der Punkte von  $G$ , die entweder einem  $s_\nu$  ( $1 \leq \nu < n$ ) mit  $s_\nu \cap s_n = \emptyset$  (dies liefert den Beitrag  $k_{1,n-1} - j_{1,n-1}$ ) oder einem  $s_\nu$  ( $1 \leq \nu < n$ ) mit  $s_\nu \cap s_n \neq \emptyset$  oder  $s_n$  angehören. Ist  $n \geq 3$  und  $1 < i < n$ , so ist die zweite Zeile von (\*) richtig, da die Menge der Punkte von  $G$ , die  $i$  Strecken von  $K_n$  angehören, sich zusammensetzt aus der Menge der Punkte von  $G$ , die entweder  $i$  Strecken von  $K_{n-1}$ , nicht jedoch  $s_n$  (Beitrag  $k_{i,n-1} - j_{i,n-1}$ ) oder  $i-1$  Strecken von  $K_{n-1}$  und  $s_n$  angehören (Beitrag  $j_{i-1,n-1}$ ). Schliesslich ist die letzte Zeile von (\*) klar, da die Menge der Punkte von  $G$ , die sämtlichen  $n$  Strecken von  $K_n$  angehören, gleich ist der Menge der Punkte von  $s_n$ , die einer der Strecken  $S_{n-1,t}^{(n-1)}$  ( $1 \leq t \leq k_{n-1,n-1}$ ) angehören. Aus (\*) folgt

$$\sum_{i=1}^n k_{i,n} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} k_{i,n-1},$$

woraus sich die behauptete additive Formel durch Induktion ergibt.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

2. Lösung (des Aufgabenstellers):  $G$  sei die  $x$ -Achse, und  $x$  bezeichne zugleich einen Punkt von  $G$  und dessen Koordinate.  $J_1, \dots, J_n$  seien die Intervalle aus  $K$ ,  $f_j$  die charakteristische Funktion von  $J_j$  ( $j = 1, \dots, n$ );  $F(x) := \sum_{j=1}^n f_j(x)$ ,  $g_i(x) := 1$  bzw. 0, falls  $F(x) \geq i$  bzw.  $< i$ . Dann ergibt sich

$$x \in G \Rightarrow F(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x). \quad (1)$$

Bezeichnet  $f(x+)$  den rechtsseitigen Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x$ , so gilt weiter  $\sum_{x \in G} [f_j(x) - f_j(x+)] = 1$  ( $j = 1, \dots, n$ ), also

$$\sum_{x \in G} [F(x) - F(x+)] = n; \quad \sum_{x \in G} [g_i(x) - g_i(x+)] = k_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt nun die Behauptung.

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), H. Flanders (Tel Aviv), H. Harborth (Braunschweig), P. Hohler (Olten) und I. Paasche (München).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. September 1972**, wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ...A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46).

**Aufgabe 662.** Die untenstehenden Figuren stellen ein  $8 \times 4$  Boss Puzzle dar, wobei die 31 Zahlentäfelchen einmal in natürlicher, einmal in umgekehrter Anordnung stehen. Es seien  $m, n$  natürliche Zahlen  $\geq 2$ . Man zeige, dass beim  $m \times n$  Boss Puzzle die natürliche Anordnung durch Verschieben von Zahlentäfelchen genau dann in die umgekehrte Anordnung übergeführt werden kann, wenn gilt:  $mn \equiv 1$  oder  $mn \equiv 2 \pmod{4}$ .

A. Herzer, Wiesbaden

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	

31	30	29	28
27	26	25	24
23	22	21	20
19	18	17	16
15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	

**Aufgabe 663.** Let  $P$  be a point in the interior of the triangle  $ABC$ . Let  $R_1, R_2, R_3$  denote the distances  $AP, BP, CP$  and let  $w_1, w_2, w_3$  denote the bisectors of the angles  $BPC, CPA, APB$ . Show that

$$R_1 w_1^2 + R_2 w_2^2 + R_3 w_3^2 + 12 w_1 w_2 w_3 \leq \frac{9}{4} R_1 R_2 R_3,$$

with equality if and only if  $ABC$  is equilateral and  $P$  is the incenter.

L. Carlitz, Durham, N.C., USA

**Aufgabe 664.** Ein Quadrat ist in gleichschenklig spitzwinklige Dreiecke ohne gemeinsame innere Punkte zu zerlegen.

*Anmerkung:* Fordert man die Zerlegung eines Quadrates in spitzwinklige Dreiecke ohne gemeinsame innere Punkte, so ist dies mit acht Dreiecken möglich (vgl. z. B. C. S. Ogilvy, Mathematische Leckerbissen, Vieweg Braunschweig 1969, p. 41, 97). Die obige Aufgabe ist mit zehn Dreiecken lösbar; die Frage nach der Minimalzahl von Dreiecken ist dagegen noch offen.

E. Schröder, Dresden, DDR

**Problem 664A.** In einer Ebene sind  $n$  ( $n \in N$ ) kongruente abgeschlossene Kreisscheiben so gelagert, dass je zwei von ihnen höchstens einen Punkt gemeinsam haben. Vermutlich ist dann die maximal mögliche Anzahl der gemeinsamen Punkte (Berührpunkte) der Kreisscheiben bei einer derartigen Lagerung  $[3n - \sqrt{12n - 3}]$ . Man beweise oder widerlege diese Vermutung.

Der Verfasser kennt keinen Beweis dieser Vermutung.

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD