Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 27 (1972)
Heft: 6

Artikel: Eine Klasse von Abzählproblemen
Autor: Hohler, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28639

Die voranstehenden Bemerkungen möchten einige Anregungen für die Schulpraxis vermitteln. Der Autor möchte damit insbesondere auch darlegen, dass die Modernisierung des Mathematik-Unterrichtes nicht aus einem Strohfeuer in Mengenalgebra bestehen muss. Eine Akzentuierung des Mengenbegriffs im Unterricht hat überhaupt erst dann einen Sinn, wenn damit echte Probleme angegangen werden.

M. Jeger, Luzern

LITERATUR

[1] M. Jeger, *Kombinatorik*, 1. Teil (Stuttgart 1973).

[2] M. Jeger und R. Ineichen, *Aufgabensammlung zur Kombinatorik, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Zürich 1971).

[3] A. Kirsch, *Venn-Diagramme und freie Boole'sche Verbände, Der Mathematik-Unterricht, 1972*, Heft 2 (Stuttgart 1972).

[4] H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics* (New Jersey 1963).

[5] M. Toussaint, *Grundkurs Mathematik*, Studienbrief I, 1: Mengen, (Tübingen 1970).

[6] H. H. Teh, *The Fundamental Theorem of Venn-Diagram and the In-Out Tables*, Nanta Mathematica III/2, (1969).

Eine Klasse von Abzählproblemen

In der vorliegenden Note stehen alle Unbestimmten für natürliche Zahlen, und es bedeutet p immer eine Primzahl.

Es geht um die folgenden vier Probleme:
Gegeben ist eine Zahl n,

1. *Wieviele Zahlen x gibt es, so dass $n + x \mid nx$?*
2. *Wieviele Zahlen $x < n$ gibt es, so dass $n - x \mid nx$?*
3. *Wieviele Zahlen $x > n$ gibt es, so dass $x - n \mid xn$?*
4. *Wieviele ungeordnete Zahlenpaare (v, w) gibt es mit dem kgV n?*

Die Anzahlen der Lösungen des ersten, zweiten, dritten, vierten Problems seien in dieser Reihenfolge mit $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$ bezeichnet.

1. *Einleitung zum ersten Problem*

In [2] findet sich die Aufgabe, alle Paare (n, m) natürlicher Zahlen zu bestimmen, deren Summe Teiler ihres Produktes ist. Es soll also gelten:

$$n + m \mid nm \, .$$

Zur Herleitung der Lösung stellen wir zunächst fest, dass Summe und Produkt zweier teilerfremder Zahlen wieder teilerfremd sind. Ist t der ggT von n und m, und $(n, m) = (ta, tb)$, so lautet die zu erfüllende Bedingung:

$$t(a + b) \mid t^2 a b \, , \quad \text{und damit} \quad a + b \mid tab \, .$$

Da a und b – und also $a + b$ und $a b$ – teilerfremd sind, muss gelten:

$$a + b \mid t\,.$$

Gleichbedeutend damit ist die Darstellung $t = c\,(a + b)$.

Die Lösungspaare sind also genau die Paare

$$(n, m) = \bigl(c\,(a + b)\,a\,,\quad c\,(a + b)\,b\bigr)\,,\quad a, b \text{ teilerfremd.}$$

2. Das erste Problem

Wir betrachten jetzt die Zahl n als gegeben und stellen uns die Frage, wieviele natürliche Zahlen x es zu einer festen Zahl n gibt, die die Bedingung $n + x \mid nx$ erfüllen. Etwa für $n = 6$ finden wir die 4 möglichen Werte 3, 6, 12, 30; für $n = 12$ die 7 Werte 4, 6, 12, 24, 36, 60, 132.

Unmittelbar einzusehen ist $A(1) = 0$.

Betrachten wir zuerst den

Fall $n = p$.

Aus dem Resultat des 1. Abschnittes ersehen wir, dass das Problem genau so viele Lösungen hat, wie es Zerlegungen der Zahl n gibt in $n = c\,(a + b)a$, a und b teilerfremd. Unter «Zerlegung» verstehen wir in diesem Abschnitt durchwegs eine solche Zerlegung. Jede Zerlegung bestimmt dann eine Zahl $x = c\,(a + b)b$. Der Faktor $a + b$ ist mindestens gleich 2, und daher kann es für eine Primzahl nur eine Zerlegung geben, nämlich

$$p = 1 \cdot \bigl(1 + (p - 1)\bigr) \cdot 1\,.$$

Demnach ist $A(p) = 1$, und die zugehörige Zahl x ist

$$x = 1 \cdot \bigl(1 + (p - 1)\bigr)\,(p - 1) = p\,(p - 1)\,.$$

Das nächste Resultat zeigt, dass die Eindeutigkeit der Lösung die Primzahlen charakterisiert.

Für den

allgemeinen Fall $n = p_1^{e_1}\,p_2^{e_2} \ldots p_r^{e_r}$

gehen wir die Zerlegung der Zahl n auf eine etwas andere Weise an. Auf Grund der Tatsache, dass a und b genau dann teilerfremd sind, wenn $a + b$ und a teilerfremd sind, schliessen wir, dass es genau so viele Zerlegungen gibt, wie es Faktorisierungen $n = c\,t_1\,t_2$ mit t_1 und t_2 teilerfremd und $t_1 > t_2$ gibt.

Um unser Problem zu lösen, berechnen wir, wie viele Möglichkeiten es gibt, die $e_1 + e_2 + \cdots + e_r$ Primfaktoren so an die Faktoren c, t_1 und t_2 zu verteilen, dass die beiden Nebenbedingungen (t_1 und t_2 teilerfremd; $t_1 > t_2$) erfüllt sind.

Setzen wir voraus, dass t_1 und t_2 teilerfremd sind, so gibt es aus Symmetriegründen gleich viele Möglichkeiten mit $t_1 > t_2$ und $t_1 < t_2$ sowie eine Möglichkeit mit $t_1 = t_2$, nämlich $n = n \cdot 1 \cdot 1$. Wir erhalten demnach die gesuchte Anzahl, wenn wir zunächst alle Faktorisierungen $n = c\,t_1\,t_2$ mit teilerfremden Faktoren t_1 und t_2 zählen, davon 1 subtrahieren und anschliessend durch 2 dividieren.

Die Bedingung, dass t_1 und t_2 teilerfremd sind, bedeutet, dass die e_k Primfaktoren p_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, nicht gleichzeitig in t_1 und in t_2 vorkommen dürfen. Es gibt also nur die beiden Möglichkeiten, sie entweder ganz in c und t_1 oder ganz in c und t_2 unterzubringen. Die Anzahl dieser Möglichkeiten beträgt

$$2\,(e_k + 1) - 1 = 2e_k + 1$$

und für alle Primzahlen somit

$$\prod_{k=1}^{r} (2\,e_k + 1)\,.$$

Die gesuchte Anzahl $A(n)$, $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{e_k}$, ist demzufolge

$$A(n) = \frac{1}{2}\left[\prod_{k=1}^{r} (2\,e_k + 1) - 1\right].$$

Die Ergebnisse $A(6) = 4$ und $A(12) = 7$ zeigen, dass die eingangs dieses Abschnittes aufgeführten Lösungen für $n = 6$ und $n = 12$ die einzigen sind.

Das eben gelöste Problem ist äquivalent damit, in der Diophantischen Gleichung

$$y(n + x) = n\,x \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{n}$$

die Anzahl der Lösungspaare $(x, y) \in N^2$ zu bestimmen.

3. *Das zweite Problem*

Wir ersetzen jetzt im 1. Problem das Pluszeichen durch ein Minuszeichen und stellen die Frage nach der Anzahl $B(n)$ der natürlichen Lösungen mit $1 \leq x \leq n - 1$. Es macht den Anschein, dass die vollständige Lösung einen ähnlichen Aufwand erfordert wie das 1. Problem. Interessanterweise ist dies aber nicht nötig. Schreibt man nämlich das vorliegende Problem als Diophantische Gleichung, so erhält man

$$y\,(n - x) = n\,x \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n}\,.$$

Diese Gleichung ist bis auf den Austausch von x und y genau die Diophantische Gleichung, die aus der Bedingung $n + x \mid nx$ entsteht.

Es folgt: $B(n) = A(n)$.

4. *Das dritte Problem*

Schreiben wir die Bedingung $x - n \mid xn$ als Diophantische Gleichung, so erhalten wir

$$y\,(x - n) = x\,n \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}\,. \tag{*}$$

Die Anzahl der ungeordneten Lösungspaare von (*) wurde in [1] berechnet.[1]) Sie beträgt

$$L(n) = \frac{1}{2}\left[1 + \prod_{k=1}^{r}(2\,e_k + 1)\right] .$$

Hier führt nun aber jedes geordnete Lösungspaar auf eine Lösung des dritten Problems. Da ausser der Lösung $x = y = 2\,n$ jedes ungeordnete Lösungspaar auf zwei geordnete Lösungspaare führt, folgt

$$C(n) = 2\,L(n) - 1 = \prod_{k=1}^{r}(2\,e_k + 1) .$$

5. *Das vierte Problem: Anzahl der Paare (v, w) mit dem kgV n*

Denken wir uns n wieder dargestellt als $n = p_1^{e_1}\,p_2^{e_2}\ldots p_r^{e_r}$, so ist jede Primzahl p_k so oft zwei Gruppen V und W zuzuschlagen, dass in mindestens einer Gruppe e_k Primzahlen sind. Das geht auf $2\,(e_k + 1) - 1 = 2\,e_k + 1$ Arten, für alle r Primzahlen also auf $\prod_{k=1}^{r}(2\,e_k + 1)$ Arten. Das Produkt der Zahlen in der Gruppe V setzen wir gleich v, das Produkt der Zahlen in der Gruppe W gleich w. Ausser dem Paar (n, n) kommt jedes ungeordnete Paar zweimal vor. Es ist somit

$$D(n) = \frac{1}{2}\left[1 + \prod_{k=1}^{r}(2\,e_k + 1)\right] .$$

Wir wollen noch erwähnen, dass dieses Problem für $n = p_1\,p_2 \ldots p_r$ isomorph ist zum Problem, aus einer Gesamtheit von r (unterscheidbaren) Elementen die Anzahl derjenigen ungeordneten Teilmengenpaare zu bestimmen, deren Vereinigung die ganze Menge ergibt.

Setzen wir zum Vergleich der 4 Resultate

$$f(n) = \frac{1}{2}\left[\prod_{k=1}^{r}(2\,e_k + 1) - 1\right] ,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} A(n) &= f(n)\\ B(n) &= f(n)\\ C(n) &= 2\,f(n) + 1\\ D(n) &= f(n) + 1. \end{aligned}$$

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang auch die Feststellung, dass für die Anzahl $L(n)$ der ungeordneten Lösungspaare von (*) gilt: $L(n) = D(n)$.

6. *Eine Paarung zwischen den Lösungsmengen des ersten und vierten Problems*

Für ein gegebenes n lassen sich die Lösungen des 1. Problems und die Lösungen des 4. Problems ohne (n, n) auf die folgende Weise ineinander überführen:

Im 2. Abschnitt haben wir gesehen, dass das 1. Problem genau so viele Lösungen hat, wie es Zerlegungen $n = c\,(a + b)\,a$ mit teilerfremden Zahlen a und b gibt. Um die

---

[1]) Diesen Hinweis verdanke ich E. Trost.

Paare (v, w) mit dem kgV n zu erhalten, setzen wir

$$(v, w) = \big(c\,a,\, c\,(a+b)\big)\,.$$

Aus den Lösungen (v, w), $v < w$, des 4. Problems erhalten wir die Lösungen des 1. Problems, indem wir setzen:

$$c = ggT(v, w)\,,\quad a = \frac{v}{ggT(v,w)}\,,\quad b = \frac{w-v}{ggT(v,w)}\,.$$

Den Beweis dazu überlassen wir dem Leser. P. Hohler, Olten

LITERATUR

[1] L. Bernstein, *Aufgabe 472*, El. Math. *20*, 15–16 (1965).
[2] J. Binz und P. Wilker, *Mathematischer Problemwettbewerb* 1969–70 im Kanton Bern, El. Math. *26*, 93–95 (1971).

Aufgaben

Aufgabe 658. If k is a positive integer and φ and J_k are the totient functions of Euler and Jordan, then show that for every positive integer n

$$J_k(n) = \sum_{d_1 d_2 \ldots d_k = n} \varphi(d_1)\,\varphi(d_2^2)\ldots\varphi(d_k^k)\,,$$

where the summation extends over all ordered k-tuples $(d_1, \ldots, d_k)$ such that $d_1 \cdot \ldots \cdot d_k = n$. D. Suryanarayana, Waltair, India

Lösung: Nach W. Sierpiński, Elementary Theory of Numbers, p. 241, ist

$$J_k(1) = 1\,,\quad J_k(n) = n^k \prod_{p \mid n} (1 - p^{-k}) \quad \text{für} \quad n > 1\,; \tag{1}$$

hieraus ersieht man die Multiplikativität von J_k und ferner $J_1(n) = \varphi(n)$ für alle $n \geq 1$, womit die behauptete Darstellung von $J_k(n)$ für $k = 1$ bewiesen ist. Sie sei bereits für $k \geq 1$ und alle $n \geq 1$ bekannt. Sei p eine Primzahl, s eine natürliche Zahl; dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{\substack{(d_1,\ldots,d_{k+1})\\ d_1\ldots d_{k+1}=p^s}} \varphi(d_1)\ldots\varphi(d_{k+1}^{k+1}) = \sum_{d_{k+1}\mid p^s} \varphi(d_{k+1}^{k+1}) \sum_{\substack{(d_1,\ldots,d_k)\\ d_1\ldots d_k = p^s/d_{k+1}}} \varphi(d_1)\ldots\varphi(d_k^k)$$

$$= \sum_{d_{k+1}\mid p^s} \varphi(d_{k+1}^{k+1})\, J_k\!\left(\frac{p^s}{d_{k+1}}\right) = \sum_{\sigma=0}^{s} \varphi(p^{\sigma(k+1)})\, J_k(p^{s-\sigma})$$

$$= p^{sk}(1-p^{-k}) + \sum_{\sigma=1}^{s-1} p^{\sigma(k+1)}(1-p^{-1})\, p^{(s-\sigma)k}(1-p^{-k}) + p^{s(k+1)}(1-p^{-1})$$

$$= p^{s(k+1)}(1-p^{-(k+1)}) = J_{k+1}(p^s)\,.$$