Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 27 (1972)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nach (6) und (7) enthält $\overline{\mathcal{K}_\varepsilon[f]}$ keine inneren Punkte, d.h. $\mathcal{K}_\varepsilon[f]$ ist nirgends dicht. q.e.d.

Satz

Ist $f \in \mathfrak{J}[a, b]$, so ist $\mathcal{H}[f]$ nicht dicht in $[a, b]$.

Beweis

Nach Hausdorff ([2] Kap. IX, § 3) gilt folgender Satz: Sei g eine auf $[a, b]$ definierte Funktion und sei $S[g]$ die Menge derjenigen Punkte, in denen g stetig ist. Ist $S[g]$ dicht in $[a, b]$, so ist $S[g]$ keine Menge erster Kategorie in bezug auf $[a, b]$.

Wir nehmen nun an, für eine Funktion $f \in \mathfrak{J}[a, b]$ sei $\mathcal{H}[f]$ dicht in $[a, b]$. Wegen $\mathcal{H}[f] \subseteq S[f^*]$ ist somit auch $S[f^*]$ dicht in $[a, b]$. Nach dem oben zitierten Satz von Hausdorff kann $S[f^*]$ keine Menge erster Kategorie sein. Dies führt aber zu einem Widerspruch zu Hilfssatz 2. q.e.d.

Rita Jeltsch, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

[1] F. Fricker, *Über hebbare Unstetigkeiten*, El. Math. *25* 107, (1970).
[2] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, Veit & Co., 1914).

Kleine Mitteilungen

Remark on multiplicative functions

In this note we prove the following theorem.

Theorem. *If f is a multiplicative function and $f(k) \neq 0$ then*

$$F_k(n) = \frac{f(kn)}{f(k)} \quad \textit{is multiplicative, too.}$$

In the case where f is the Euler totient function this theorem was established by D.H. and E. Lehmer [1]. Their proof was based on the following property of the function φ: if all prime divisors of a divide b then $\varphi(ab) = a\,\varphi(b)$.

Since there are multiplicative functions which have not this property, the proof given [1] is not valid for an arbitrary multiplicative function f.

Proof of the theorem. It is sufficient to prove that if $(a, b) = 1$ then $f(k)f(kab) = f(ka)f(kb)$. Define k_1 (resp. k_2) as the greatest integer dividing k and all prime divisors of which divide a (resp. b). Since $(a, b) = 1$, we have $(k_1, k_2) = 1$. Let $k_3 = k/k_1k_2$; k_3 evidently is an integer, $k = k_1k_2k_3$ and $(k_3, k_2) = (k_3, k_1) = 1$. Further we have $(k_1a, k_2b) =$

$(k_1 a, k_3) = (k_2 b, k_3) = (k_1 a, k_2) = (k_2 b, k_1) = 1$. Thus we obtain $f(k)\,f(kab) = f(k_1 k_2 k_3)$ $f(k_1 k_2 k_3 ab) = f(k_1 \cdot k_2 \cdot k_3)\,f(k_1 a \cdot k_2 b \cdot k_3) = f(k_1)\,f(k_2)\,f(k_3)\,f(k_1 a)\,f(k_2 b)\,f(k_3) = f(k_1 a)$ $f(k_2)\,f(k_3)\,f(k_2 b)\,f(k_1)\,f(k_3) = f(k_1 a k_2 k_3)\,f(k_2 b k_1 k_3) = f(ka)\,f(kb)$, q.e.d.

Andrzej Mąkowski, University of Warsaw, Warsaw, Poland

REFERENCE

[1] D.H. and E. LEHMER, *Heuristics, Anyone?*, *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics*, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif. 202–210 (1962).

Zur Charakterisierung von Kongruenzrelationen durch Abbildungen

In einem Verknüpfungsgebilde $(A, *)$ lässt sich bekanntlich jede Äquivalenzrelation r mit Hilfe einer Abbildung f von A darstellen als $r = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$. Dabei ist f bis auf eine Bijektion eindeutig durch r bestimmt. Nach Definition ist r genau dann Kongruenzrelation, wenn gilt:

Durch

$$f(x) \circ f(y) \underset{\mathrm{def}}{=} f(x * y) \tag{1}$$

ist eine Verknüpfung in fA definiert.

Wir wollen nun zeigen, dass es zur Darstellung der Kongruenzrelationen von A möglich ist, sich auf solche Abbildungen f von A in sich zu beschränken, für die gilt

$$f(f(x) * f(y)) = f(x * y)\,. \tag{2}$$

Zunächst liefern solche Abbildungen Kongruenzrelationen, denn aus $f(x) = f(x')$ und $f(y) = f(y')$ folgt

$$f(x) * f(y) = f(x') * f(y')\,.$$

Das ergibt mit (2)

$$f(x * y) = f(f(x) * f(y)) = f(f(x') * f(y')) = f(x' * y')\,,$$

also ist (1) erfüllt.

Ist umgekehrt r eine Kongruenzrelation von A, dann kann man eine Abbildung f dadurch definieren, dass man jedem x aus A ein vorher festgelegtes Element aus der Klasse $[x]\,r$ zuordnet. f bildet also A in sich ab, und wegen $[f(x)]\,r = [x]\,r$ gilt

$$f(f(x)) = f(x)\,. \tag{3}$$

Da r Kongruenzrelation ist, gilt (1). Also erhalten wir

$$f(f(x)) \circ f(f(y)) = f(f(x) * f(y))\,.$$

Wegen (3) folgt

$$f(x) \circ f(y) = f(f(x) * f(y)) .$$

Andererseits gilt nach (1)

$$f(x) \circ f(y) = f(x * y) .$$

Daraus folgt (2). Das ergibt den

Satz. In einem Verknüpfungsgebilde $(A, *)$ lässt sich jede Kongruenzrelation darstellen durch eine Abbildung f von A in sich mit

$$f(f(x) * f(y)) = f(x * y) ,$$

und zu jeder Abbildung dieser Art gehört eine Kongruenzrelation von A.

Bei unseren Überlegungen konnten wir die Schlüsse ziehen:
Aus (2) folgt (1) und aus (1) und (3) folgt (2). Es fragt sich nun, ob umgekehrt aus (2) schon (3) folgt. Das ist aber nicht der Fall, Gegenbeispiel: $A = \{0, 1\}$, $0 * 0 = 0 = 1 * 1$, $1 * 0 = 1 = 0 * 1$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. (2) ist erfüllt; (3) ist verletzt, denn $f(f(0)) = f(1) \neq f(0)$.

Hans-Joachim Vollrath, PH Würzburg

Elementarmathematik und Didaktik

Zugehörigkeitstafeln und charakteristische Funktionen

Man wundert sich immer wieder, dass sich die Didaktiker im Zeitalter der Mengen-Mathematik nur zaghaft an die Aufgabe heranmachen, Beweisverfahren für die Grundgesetze der Mengenalgebra zu entwickeln, die auch im Schulunterricht traktabel sind. Bei der Mehrzahl der in neuerer Zeit erschienenen Unterrichtswerke besteht die Verankerung der Mengenalgebra in der Veranschaulichung dieser Gesetze an Venn-Diagrammen. Autoren mit einem besser ausgebildeten mathematischen Gewissen weisen noch darauf hin, dass die Grundgesetze der Mengenalgebra auf die Regeln der Aussagen-Logik zurückgeführt werden können. In seltenen Fällen wird die Abstützung auf die Aussagen-Logik ausführlich dargelegt, aber diese wird dann fast ausnahmslos mit einem Feuerwerk in formaler Logik erkauft. Von der unterrichtlichen Situation her sind solche Beweisverfahren vorzuziehen, bei denen die Aussagen-Logik nur implizit verwendet wird. Die bisherigen Erfahrungen zeigen nämlich mit aller Deutlichkeit, dass bei einer Behandlung der Aussagen-Logik im Schulunterricht mehr Zeit damit vertan wird, um über die Mathematik zu reden, statt Mathematik zu treiben.