Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 27 (1972)
Heft: 6

Artikel: Über hebbare Unstetigkeiten
Autor: Jeltsch, Rita
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28637

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

REFERENCES

[1] J. Aczél and L. Fuchs, *A Minimum-Problem on Areas of Inscribed and Circumscribed Polygons of a Circle*, Compositio Math. *8*, 61–67 (1951).
[2] O. Bottema, R. Z. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović, and P. M. Vasić, *Geometric Inequalities* (Wolters-Noordhoff, Groningen 1969).
[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, 2nd edition (Cambridge University Press 1959).
[4] E. W. Hobson, *A Treatise on Plane Trigonometry*, 7th edition (Cambridge University Press 1928).
[5] J. Karamata, *Sur une inégalité relative aux fonctions convexes*, Publ. Math. Univ. Belgrade *1* 145-148, (1932).
[6] A. Makowski, *Some Geometric Inequalities*, El. Math. *17*, 40–41 (1962).
[7] J. Steinig, *Sur quelques applications géométriques d'une inégalité relative aux fonctions convexes*, Ens. Math. (2) *11*, 281–285 (1965).
[8] J. Steinig, *On Some Rules of Laguerre's, and Systems of Equal Sums of Like Powers*, Rend. Mat., ser. 6, *4*, 629–644 (1971).

Über hebbare Unstetigkeiten

In [1] wurde die Menge $\mathfrak{F}[a, b]$ derjenigen in $[a, b]$ definierten Funktionen betrachtet, die in jedem Punkt von $[a, b]$ unstetig sind.

Für $f \in \mathfrak{F}[a, b]$ bezeichne wiederum $\mathfrak{H}[f]$ die Menge derjenigen Punkte von $[a, b]$, in denen die Unstetigkeit von f hebbar ist, und $\mathfrak{U}[f]$ die Menge derjenigen Punkte von $[a, b]$, in denen die Unstetigkeit von f nicht hebbar ist.

In [1] wurde nun einerseits gezeigt, dass für jedes $f \in \mathfrak{F}[a, b]$ $\mathfrak{U}[f]$ dicht in $[a, b]$ ist; andererseits wurden Funktionen $f \in \mathfrak{F}[a, b]$ konstruiert, für die $\mathfrak{H}[f]$ «sehr umfassend» ist. Daran anschliessend wurde die Frage aufgeworfen, ob für ein $f \in \mathfrak{F}[a, b]$ $\mathfrak{H}[f]$ sogar dicht sein kann. Wir werden in dieser Note beweisen, dass dies nicht möglich ist. Damit ist dann gleichzeitig gezeigt, dass die Beispiele aus [1] für Funktionen f mit «sehr umfassendem» $\mathfrak{H}[f]$ «gut» sind.

Bei gegebenem $f \in \mathfrak{F}[a, b]$ definieren wir noch die «abgeänderte» Funktion f^*:

$$f^*(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) & \text{für} \quad x \in \mathfrak{H}[f] \\ f(x) & \text{für} \quad x \in \mathfrak{U}[f]\,. \end{cases}$$

Die Menge derjenigen Punkte aus $[a, b]$, in denen f^* stetig ist, bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}[f^*]$.

Hilfssatz 1

Für jedes $f \in \mathfrak{F}[a, b]$ ist $\mathfrak{H}[f]$ abzählbar.

Beweis

Sei $f \in \mathfrak{F}[a, b]$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ bilden wir die Punktmenge

$$\mathfrak{H}_\varepsilon[f] = \{x \in \mathfrak{H}[f] / |\, f^*(x) - f(x) \,| \geq \varepsilon\}\,.$$

Wegen

$$\mathcal{H}[f] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_{1/k}[f]$$

genügt es offenbar zu zeigen, dass $\mathcal{H}_\varepsilon[f]$ abzählbar ist. Dazu beweisen wir:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem Punkt $x_0 \in \mathcal{H}[f]$ existiert ein $\delta(x_0, \varepsilon)$ derart, dass

$$| f^*(x) - f(x) | < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < | x - x_0 | < \delta(x_0, \varepsilon) . \tag{1}$$

Wegen $x_0 \in \mathcal{H}[f]$ gibt es vorerst zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta(x_0, \varepsilon)$ mit der Eigenschaft

$$| f^*(x_0) - f(x) | < \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < | x - x_0 | < \eta(x_0, \varepsilon) . \tag{2}$$

Wir setzen $\delta(x_0, \varepsilon) = \eta(x_0, \varepsilon/3)$ und prüfen (1) für $x \in \mathcal{H}[f]$ nach; für $x \in \mathcal{U}[f]$ ist die Aussage (1) ja trivial. Sei also $x \in \mathcal{H}[f]$ und $0 < | x - x_0 | < \delta(x_0, \varepsilon)$; zudem können wir o.B.d.A. $x < x_0$ annehmen. $x \in \mathcal{H}[f]$ bedeutet $\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f^*(x)$; und daraus folgt wegen der Dichte von $\mathcal{U}[f]$ in $[a, b]$ (vgl. [1]) die Existenz eines solchen $\xi_0 \in \mathcal{U}[f]$, dass

$$x < \xi_0 < x_0 \quad \text{und} \quad | f^*(x) - f(\xi_0) | < \frac{\varepsilon}{3} . \tag{3}$$

Bei den gemachten Annahmen über x und ξ_0 folgt nun aus (2) und (3)

$$| f^*(x) - f(x) | \leq | f^*(x) - f(\xi_0) | + | f(\xi_0) - f^*(x_0) | + | f^*(x_0) - f(x) | < \varepsilon ,$$

da jeder Summand kleiner $\frac{\varepsilon}{3}$ ist.

Aussage (1) besagt, dass die Menge $\mathcal{H}_\varepsilon[f]$ nur isolierte Punkte enthält; eine solche Menge ist aber abzählbar. q.e.d.

Bemerkung

Wir weisen darauf hin, dass aus obigem Beweis folgende Aussage direkt hervorgeht: Die Funktion f^* ist in jedem Punkt $x_0 \in \mathcal{H}[f]$ stetig.

Beweis: Für $x \in \mathcal{H}[f]$ und $0 < | x - x_0 | < \delta(x_0, \varepsilon)$ ist nach (2) und (3)

$$| f^*(x_0) - f^*(x) | \leq | f^*(x_0) - f(\xi_0) | + | f(\xi_0) - f^*(x) | < \frac{2}{3} \varepsilon ;$$

für $x \in \mathcal{U}[f]$ und $0 < | x - x_0 | < \delta(x_0, \varepsilon)$ ist nach (2)

$$| f^*(x_0) - f^*(x) | = | f^*(x_0) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Hilfssatz 2

Für jedes $f \in \mathcal{F}[a, b]$ ist $\mathcal{S}[f^*]$ eine Menge erster Kategorie in bezug auf $[a, b]$.

Beweis

Nach Hausdorff ([2], Kap. VIII, §9) heisst eine Teilmenge $\mathcal{A}$ von $[a, b]$ eine «Menge erster Kategorie in bezug auf $[a, b]$», wenn $\mathcal{A}$ eine abzählbare Vereinigung von Mengen

ist, die in $[a, b]$ nirgends dicht sind. Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Mengen erster Kategorie in bezug auf $[a, b]$, so ist natürlich $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ wiederum eine Menge erster Kategorie in bezug auf $[a, b]$.

Nach Hilfssatz 1 und der anschliessenden Bemerkung ist für jedes $f \in \mathfrak{F}[a, b]$ $\mathcal{H}[f]$ eine Menge erster Kategorie in bezug auf $[a, b]$, und es ist $\mathcal{H}[f] \subseteq \mathcal{S}[f^*]$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mathcal{S}[f^*] - \mathcal{H}[f] = \mathcal{S}[f^*] \cap U[f]$ ebenfalls eine Menge erster Kategorie ist.

Wir beweisen zuerst folgendes: Zu jedem $x_0 \in \mathcal{S}[f^*] \cap \mathcal{U}[f]$ existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $y_n \in \mathcal{H}_{\varepsilon_0}[f]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$.

Aus $x_0 \in \mathcal{S}[f^*]$ folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(x_0, \varepsilon)$ derart, dass

$$| f^*(x_0) - f^*(x) | < \varepsilon \text{ für } | x - x_0 | < \delta(x_0, \varepsilon) . \tag{4}$$

Andererseits folgt aus $x_0 \in \mathcal{U}[f]$: Es gibt ein $\varepsilon_1 > 0$ und eine Folge $y_n \in [a, b]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ derart, dass

$$| f(x_0) - f(y_n) | = | f^*(x_0) - f(y_n) | \geq \varepsilon_1 . \tag{5}$$

Sei nun für $n \geq n_0$ $| y_n - x_0 | < \delta(x_0, \varepsilon_1/2)$; dann folgt aus (4)

$$| f^*(x_0) - f^*(y_n) | < \frac{\varepsilon_1}{2} .$$

Dies ist aber nach (5) nur möglich, wenn $y_n \in \mathcal{H}[f]$ und

$$| f^*(y_n) - f(y_n) | > \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_0$$

ist. Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

Wir bilden nun für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Punktmenge

$$\mathcal{K}_\varepsilon[f] = \left\{ x \in \mathcal{S}[f^*] \cap \mathcal{U}[f] \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \text{ eine Folge } y_n \in \mathcal{H}_\varepsilon[f] \\ \text{mit } \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \end{array} \right\}$$

Nach obigem ist

$$\mathcal{S}[f^*] \cap \mathcal{U}[f] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\frac{1}{k}}[f] .$$

Hilfssatz 2 ist also bewiesen, wenn wir gezeigt haben, dass $\mathcal{K}_\varepsilon[f]$ nirgends dicht in $[a, b]$ ist. Aus der Definition von $\mathcal{K}_\varepsilon[f]$ folgt aber, dass jeder Punkt und jeder Häufungspunkt von $\mathcal{K}_\varepsilon[f]$ Häufungspunkt von $\mathcal{H}_\varepsilon[f]$ ist; also (in der üblichen Schreibweise)

$$\overline{\mathcal{K}_\varepsilon[f]} \subseteq (\mathcal{H}_\varepsilon[f])' \subseteq (\mathcal{H}[f])' . \tag{6}$$

Andererseits kann nach (1) ein Häufungspunkt von $\mathcal{H}_\varepsilon[f]$ nicht aus $\mathcal{H}[f]$ sein; es ist also

$$\overline{\mathcal{K}_\varepsilon[f]} \cap \mathcal{H}[f] = \phi . \tag{7}$$

Nach (6) und (7) enthält $\overline{\mathcal{K}_\varepsilon[f]}$ keine inneren Punkte, d.h. $\mathcal{K}_\varepsilon[f]$ ist nirgends dicht. q.e.d.

Satz

Ist $f \in \mathfrak{F}[a, b]$, so ist $\mathcal{H}[f]$ nicht dicht in $[a, b]$.

Beweis

Nach Hausdorff ([2] Kap. IX, § 3) gilt folgender Satz: Sei g eine auf $[a, b]$ definierte Funktion und sei $\mathcal{S}[g]$ die Menge derjenigen Punkte, in denen g stetig ist. Ist $\mathcal{S}[g]$ dicht in $[a, b]$, so ist $\mathcal{S}[g]$ keine Menge erster Kategorie in bezug auf $[a, b]$.

Wir nehmen nun an, für eine Funktion $f \in \mathfrak{F}[a, b]$ sei $\mathcal{H}[f]$ dicht in $[a, b]$. Wegen $\mathcal{H}[f] \subseteq \mathcal{S}[f^*]$ ist somit auch $\mathcal{S}[f^*]$ dicht in $[a, b]$. Nach dem oben zitierten Satz von Hausdorff kann $\mathcal{S}[f^*]$ keine Menge erster Kategorie sein. Dies führt aber zu einem Widerspruch zu Hilfssatz 2. q.e.d.

Rita Jeltsch, Zürich

LITERATURVERZEICHNIS

[1] F. Fricker, *Über hebbare Unstetigkeiten*, El. Math. *25* 107, (1970).
[2] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, Veit & Co., 1914).

Kleine Mitteilungen

Remark on multiplicative functions

In this note we prove the following theorem.

Theorem. *If f is a multiplicative function and $f(k) \neq 0$ then*

$$F_k(n) = \frac{f(kn)}{f(k)} \quad \textit{is multiplicative, too.}$$

In the case where f is the Euler totient function this theorem was established by D.H. and E. Lehmer [1]. Their proof was based on the following property of the function φ: if all prime divisors of a divide b then $\varphi(ab) = a\,\varphi(b)$.

Since there are multiplicative functions which have not this property, the proof given [1] is not valid for an arbitrary multiplicative function f.

Proof of the theorem. It is sufficient to prove that if $(a, b) = 1$ then $f(k)f(kab) = f(ka)f(kb)$. Define k_1 (resp. k_2) as the greatest integer dividing k and all prime divisors of which divide a (resp. b). Since $(a, b) = 1$, we have $(k_1, k_2) = 1$. Let $k_3 = k/k_1k_2$; k_3 evidently is an integer, $k = k_1k_2k_3$ and $(k_3, k_2) = (k_3, k_1) = 1$. Further we have $(k_1a, k_2b) =$