Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 27 (1972)
Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

REFERENCES

[1] V. N. BHAT and S. F. KAPOOR, *The Powers of Connected Graphs are Highly Hamiltonian*, J. Res. Nat. Bur. Stand. *75B*, 63–66 (1971).
[2] G. CHARTRAND and S. F. KAPOOR, *The Cube of Every Connected Graph is 1-Hamiltonian*, J. Res. Nat. Bur. Stand. *73B*, 47–48 (1969).
[3] G. CHARTRAND and S. F. KAPOOR, *The Square of Every 2-Connected Graph is 1-Hamiltonian*, to appear.
[4] G. CHARTRAND, S. F. KAPOOR, and D. R. LICK, *n-Hamiltonian Graphs*, J. Combinat. Theory *9*, 308–312 (1970).
[5] H. FLEISCHNER, *The Square of Every Nonseparable Graph is Hamiltonian*, to appear.

Aufgaben

Aufgabe 654. Man beweise die Richtigkeit der Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} k^{n+r} = n! \sum_{1 \le k_1 \le \ldots \le k_r \le n} k_1 k_2 \ldots k_r \qquad (k_i \in N)$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$ und $r = 0, 1, 2, \ldots$ (für $r = 0$ habe die rechts stehende Summe den Wert 1).

O. Reutter, Ochsenhausen

Lösung: Es sei

$$F(r, n) = \sum_{1 \le k_1 \le \ldots \le k_r \le n} k_1 k_2 \ldots k_r \qquad (k_i \in N) .$$

Durch Betrachtung des Wertes von k_r findet man

$$F(r, n) = F(r, n-1) + nF(r-1, n) . \tag{1}$$

Aus $F(0, n) = F(r, 1) = 1$ und (1) kann man rekursiv alle $F(r, n)$ bestimmen. Für die Stirlingschen Zahlen zweiter Art gilt

$$S(n, n) = S(r+1, 1) = 1 \; (n > 0, r \ge 0)$$

und

$$S(n+r, n) = S(n+r-1, n-1) + nS(n+r-1, n) , \tag{2}$$

(cf. J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, ch. 2. (37)). Weil die Anfangswerte und die Beziehungen (1) und (2) übereinstimmen, ist bewiesen:

$$F(r, n) = S(n+r, n) .$$

Weil auch

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+r} = S(n+r, n)$$

(J. Riordan, loc. cit. p. 43), ist die Behauptung bewiesen.

J. H. van Lint, Eindhoven

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Flanders (Ramat-Aviv, Israel), J. H. van Lint (Eindhoven, Niederlande; zweite Lösung), H. Müller (Bielefeld, BRD) und I. Paasche (München, BRD).

Anmerkung der Redaktion: Verschiedene Einsender interpretieren die linke Seite der behaupteten Formel als die Anzahl der surjektiven Abbildungen von einer $(n+r)$-elementigen Menge in eine n-elementige Menge und die rechte Seite als die $n!$-fache Anzahl der n-Partitionen einer $(n+r)$-elementigen Menge und gelangen so zur Behauptung.

Aufgabe 655. Man setze $\binom{n}{k} = n_k$ und $n_0 + n_4 + n_8 + \ldots = a_n$, $n_1 + n_5 + n_9 + \ldots = b_n$, $n_2 + n_6 + n_{10} + \ldots = c_n$, $n_3 + n_7 + n_{11} + \ldots = d_n$. Nun beweise man $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 = 4^{n-1} + 2^{n-1}$ für jede natürliche Zahl n. I. Paasche, München

Erste Lösung: Aus

$$0 = (1-1)^n = a_n - b_n + c_n - d_n \quad \text{und} \quad 2^n = (1+1)^n = a_n + b_n + c_n + d_n$$

folgt

$$2^{n-1} = a_n + c_n = b_n + d_n$$

und hieraus

$$4^{n-1} = a_n^2 + 2a_n c_n + c_n^2 = b_n^2 + 2b_n d_n + d_n^2 . \tag{*}$$

Für

$$z_n := (1+i)^n = a_n - c_n + i\,(b_n - d_n)$$

gilt

$$|z_n|^2 = 2^n = (a_n - c_n)^2 + (b_n - d_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 - 2\,(a_n c_n + b_n d_n) . \tag{**}$$

Eliminiert man nun aus (*) und (**) die gemischten Produkte, so erhält man

$$2 \cdot 4^{n-1} + 2^n = 2\,(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) ,$$

und hieraus folgt sofort die Behauptung.

B. Marzetta, Basel

Zweite Lösung: Die behauptete Identität

$$a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 = 4^{n-1} + 2^{n-1} \qquad (n \in N) , \tag{1}$$

die für $n = 1$ offensichtlich richtig ist, lässt sich durch vollständige Induktion beweisen:

Aus dem Additionstheorem für Binomialkoeffizienten $(n+1)_k = n_k + n_{k-1}$ $(n, k \in N)$ folgen unmittelbar die Beziehungen

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \quad b_{n+1} = b_n + a_n, \quad c_{n+1} = c_n + b_n \quad \text{und} \quad d_{n+1} = d_n + c_n . \tag{2}$$

Damit ist zunächst

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2\,(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + 2\,(a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n)\ .$$

Ferner gelten bekanntlich die Beziehungen $a_n + b_n + c_n + d_n = 2^n$ und $a_n + c_n = 2^{n-1}$ und $b_n + d_n = 2^{n-1}$, woraus

$$\left.\begin{aligned} 2\,(a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n) &= (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 - (a_n + c_n)^2 - (b_n + d_n)^2 \\ &= 4^n - 4^{n-1} - 4^{n-1} = 2\cdot 4^{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

folgt. Somit ist

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2\,(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) + 2\cdot 4^{n-1}\ .$$

Hieraus resultiert unter der Voraussetzung, dass (1) für ein $n \in N$ gilt, die Identität

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2\,(4^{n-1} + 2^{n-1}) + 2\cdot 4^{n-1} = 4^n + 2^n\ ,$$

womit der Induktionsbeweis erbracht ist.

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), J. Fehér (Pécs, Ungarn), P. Hohler (Olten), L. Kieffer (Luxembourg), W. Kropatsch (Graz, Österreich), H. S. M. Kruijer (Eindhoven, Niederlande), E. Teuffel (Korntal, BRD), A. Tipp (Soest, BRD) und H. Wimmer (Graz, Österreich).

Anmerkung der Redaktion: L. Carlitz bemerkt, dass nebst $a_n b_n + b_n c_n + c_n d_n + d_n a_n = 4^{n-1}$ (vgl. (3) oben) auch gilt:

$$s_n := a_n a_{n+1} + b_n b_{n+1} + c_n c_{n+1} + d_n d_{n+1} = 2^{2n-1} + 2^{n-1}\ .$$

Nach (2) ist nämlich

$$s_n = \frac{1}{2}\,(a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2)\ .$$

Für verwandte Aufgaben vgl. A. M. Yaglom – I. M. Yaglom, Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions, Vol. 1, Holden-Day San Francisco 1964, insbesondere p. 17, Problem 58.

Aufgabe 656. Es bezeichnen n eine natürliche Zahl ≥ 2 und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reelle Zahlen. Man beweise: Ist $A_n\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (a_{ik})$ die $n \times n$-Matrix mit $a_{ik} = \sin(\alpha_{max\{i,k\}} - \alpha_{min\{i,k\}})$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, so gilt

$$\operatorname{Det} A_n\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^{n-1}\, 2^{n-2} \prod_{i=1}^{n} \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i)\ ,$$

wobei $\alpha_{n+1} = \alpha_1 + \pi$.

W. Fischer, Bielefeld

Lösung: Für $n = 2$ ist die Richtigkeit evident. Im Hinblick auf ein induktives Vorgehen ist es günstig, die rechte Seite der behaupteten Formel unter Berücksichtigung von $\alpha_{n+1} = \alpha_1 + \pi$ und $\sin(\varphi + \pi) = \sin(-\varphi)$ in der Gestalt

$$D_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := (-1)^{n-1} 2^{n-2} \sin(\alpha_n - \alpha_1) \prod_{i=1}^{n-1} \sin(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \tag{1}$$

zu verwenden. Wir nehmen nun an, es gelte

$$\operatorname{Det} A_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = D_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,. \tag{2_n}$$

Die Matrix B_{n+1} entstehe aus A_{n+1} durch Multiplikation der letzten Zeile mit $a_{n,1}$ und nachfolgender Subtraktion der mit $a_{n+1,1}$ multiplizierten vorletzten Zeile von der letzten Zeile. Dann ist

$$\operatorname{Det} B_{n+1} = a_{n,1} \operatorname{Det} A_{n+1}\,. \tag{3}$$

Aus bekannten Additionstheoremen folgt die Gültigkeit von

$$a_{n+1,r}\, a_{n,1} - a_{n,r}\, a_{n+1,1} = a_{n+1,n}\, a_{r,1} \quad (1 < r < n)\,.$$

Nun haben alle Elemente der letzten Zeile von B_{n+1} den gemeinsamen Faktor $a_{n+1,n}$. Somit folgt

$$\operatorname{Det} B_{n+1} = a_{n+1,n} \operatorname{Det} C_{n+1}\,, \tag{4}$$

wobei die letzte Zeile von C_{n+1} lautet:

$$0, \qquad a_{2,1}, \qquad a_{3,1}, \qquad \ldots, a_{n,1}, \qquad -a_{n+1,1}\,.$$

Subtrahiert man davon die erste Zeile von A_{n+1} (auch erste Zeile von C_{n+1}), so entsteht die Zeile

$$0, \qquad 0, \qquad 0, \qquad \ldots, 0, \qquad -2a_{n+1,1}\,.$$

Somit gilt $\operatorname{Det} C_{n+1} = -2a_{n+1,1} \operatorname{Det} A_n$, also wegen (3) und (4) $a_{n,1} \operatorname{Det} A_{n+1} = -2a_{n+1,1}\, a_{n+1,n} \operatorname{Det} A_n$ und mit (1) und (2) weiter (5) $\sin(\alpha_n - \alpha_1) \operatorname{Det} A_{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = \sin(\alpha_n - \alpha_1) D_{n+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$. Für $\sin(\alpha_n - \alpha_1) \neq 0$ folgt (2_{n+1}) aus (5), für $\sin(\alpha_n - \alpha_1) = 0$ mit einer zusätzlichen Stetigkeitserwägung. Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen. C. Bindschedler, Küsnacht ZH

Weitere Lösungen sandten L. Carlitz (Durham, N.C., USA) und J. Fehér (Pécs, Ungarn).

Aufgabe 657. Es seien $m_A, m_B, m_C > 0$ die Massen dreier nichtkollinearer Massenpunkte A, B, C in der Ebene E. Wie liegen A, B, C in E und in welchem Verhältnis stehen m_A, m_B, m_C zueinander, wenn der Schwerpunkt von A, B, C

a) im Umkreismittelpunkt U, b) im Höhenschnittpunkt H,

c) im Inkreismittelpunkt I des Dreiecks ABC liegt? R. Rose, Biel

Lösung: Die Frage lässt sich umformen. Berechnen wir die baryzentrischen Koordinaten von U, H und I bezüglich der Punkte A, B, C mit der Beschränkung, dass sämtliche Koordinaten positiv gewählt werden müssen. Die Beschränkung hat zur Folge, dass in den Fällen a) und b) die Punkte A, B, C ein spitzwinkliges Dreieck bilden müssen, da U und H nur bei positiven baryzentrischen Koordinaten innere Punkte des Dreiecks ABC sein können.

Bezeichnen wir wie üblich die Seitenlängen des Dreiecks ABC mit a, b, c und die Innenwinkel mit α, β, γ.

a) Schneidet die Ecktransversale CU die Dreiecksseite AB in C_1, so gilt $m_A : m_B = C_1B : AC_1$ und $\sphericalangle AUC = 2\beta$, als Zentriwinkel über dem Kreisbogen AC. Da U der Umkreismittelpunkt ist, fällt das Dreieck ACU gleichschenklig aus, und es gilt $\sphericalangle ACU = \sphericalangle ACC_1 = 90° - \beta$. Analog ergibt sich $\sphericalangle BCC_1 = 90° - \alpha$. Wenden wir den Sinussatz auf die Dreiecke ACC_1 und BCC_1 an, so folgt $AC_1 : CC_1 = \sin(90° - \beta) : \sin\alpha$ und $BC_1 : CC_1 = \sin(90° - \alpha) : \sin\beta$, woraus

$$\frac{BC_1}{AC_1} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$$

resultiert.
Nach Durchführung obiger Rechnung auch bei den anderen zwei Dreiecksseiten bekommen wir

$$m_A : m_B : m_C := \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma .$$

b) Schneidet die Ecktransversale CH die Strecke AB in C_2, so gilt wieder

$$m_A : m_B = C_2B : AC_2 .$$

In den Dreiecken ACC_2 und BCC_2 gilt

$$CC_2 = AC_2 \operatorname{tg}\alpha = BC_2 \operatorname{tg}\beta ,$$

woraus

$$BC_2 : AC_2 = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta .$$

Wiederholen wir obige Rechnung mit den anderen Dreiecksseiten, so folgt unmittelbar

$$m_A : m_B : m_C = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma .$$

c) Schneidet die Ecktransversale CI (d. h. die Winkelhalbierende des Winkels γ) die Dreiecksseite AB in C_3, so gilt bekanntlich

$$C_3B : AC_3 = a : b .$$

Ähnlich lassen sich die anderen Teilstrecken ausrechnen, und mit Rücksicht auf den Sinussatz ergibt sich

$$m_A : m_B : m_C = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma .$$

Es folgt auch aus unseren Resultaten unmittelbar, dass das Dreieck ABC in den Fällen a) und b) spitzwinklig sein muss; sonst würden die Gewichte (z. B. $\sin 2\alpha$ bzw. $\operatorname{tg}\alpha$) nicht alle grösser als Null.

Bemerkung: Es ist zu erwähnen, dass obige Aufgabe (als meine Originalaufgabe) in etwas geänderter Form schon einmal in ungarischer Sprache in der Mathematischen Zeitschrift für Mittelschüler (Középiskolai Matematikai Lapok) Band *31*, 1965, Seite 76–77, als Aufgabe Nr. 1374 samt Lösung erschien. J. Schopp, Budapest

Weitere Lösungen sandten J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Frischknecht (Berneck, SG), H. Kappus (Bottmingen, BL), L. Kieffer (Luxembourg), B. Marzetta (Basel), I. Paasche (München) und U. Schweizer (Biel).

Anmerkung der Redaktion: I. Paasche weist hin auf die Artikel von H. Zeitler (Praxis der Math. *1* (1959), 156–158) und E. Winkler (Praxis der Math. *11* (1969), 91–98, Formeln (10)–(13); *12* (1970), 123–130, Formeln (6)–(9)).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Mai 1973,** wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 677. Ein Dreieck habe den Flächeninhalt F und die Seitenhalbierenden m_a, m_b, m_c. Man zeige, dass

$$(m_a + m_b + m_c)/(m_a^{-1} + m_b^{-1} + m_c^{-1}) \geq F\sqrt{3}\,,$$

mit Gleichheit dann und nur dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Aufgabe 678. In jedem Dreieck mit den Ecken A_i, den Seitenlängen a_i, dem halben Umfang s, den Winkelhalbierenden w_i und dem Inkreismittelpunkt I gilt

$$9\left\{\frac{\sum a_i^3}{2s^3} + 16\left(\prod_i \frac{\overline{IA_i}}{w_i}\right)^{1/3}\right\} \leq 100\,,$$

mit Gleichheit genau im gleichseitigen Dreieck. Man beweise diese Behauptung.

F. Leuenberger, Feldmeilen, ZH

Aufgabe 679. Es seien n und d natürliche Zahlen mit $d < n$. Man beweise, dass folgende Aussagen logisch gleichwertig sind: a) In jeder Sequenz von n aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen gibt es d Zahlen derart, dass alle von ihnen mit jeder der restlichen $n - d$ Zahlen einen grössten gemeinsamen Teiler kleiner als d haben. b) $n \leqq 2d - 1$.

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Aufgabe 680. Für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ sei

$$m(n) := \min \left\{ 1 - \sum_i \frac{1}{a_i} ; \, a_i \text{ ganz}, \, 1 < a_1 < \ldots < n, \, \sum_i \frac{1}{a_i} < 1 \right\}.$$

Man beweise

a) Zu jeder reellen Zahl α mit $0 < \alpha < 1$ gibt es eine natürliche Zahl $n_0(\alpha)$ derart, dass aus $n > n_0(\alpha)$ folgt $m(n) < e^{-n^\alpha}$.

b) Zu jeder reellen Zahl ε mit $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ derart, dass aus $n > n_0(\varepsilon)$ folgt $m(n) > e^{-n^{(1+\varepsilon)}}$.

P. Erdös und R. L. Graham, Budapest

Literaturüberschau

Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces. Von Ivan Singer. Aus dem Rumänischen übersetzt von R. Georgescu. 415 Seiten. DM 78.–. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 171. Publishing House of the Academy of the Socialist Republic of Romania, Bucharest, und Springer-Verlag Berlin – Heidelberg – New York 1970.

Inhalt: Preface. Preface to the English edition. Introduction. I. Best approximation in normed linear spaces by elements of arbitrary linear subspaces. II. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces of finite dimension. III. Best approximation in normed linear spaces by elements of closed linear subspaces of finite codimension. Appendix I: Best approximation in normed linear spaces by elements of nonlinear sets. Appendix II: Best approximation in metric spaces by elements of arbitrary sets. Bibliography.

In den meisten bisherigen Werken über Approximationstheorie wurde die Funktionalanalysis bei der Behandlung der Probleme bester Approximation nur spärlich verwendet. Der Zweck dieses Buches ist die Darbietung einer modernen, konsequent auf funktionalanalytischen Methoden aufgebauten Theorie der besten Approximation, zu welcher der Verfasser selbst namhaft beigetragen hat. Es muss darauf hingewiesen werden, dass eine in normierten Räumen betriebene Approximationstheorie aus verschiedenen Gründen einer klassisch-analytischen Version vorzuziehen ist: Die erstere zeichnet sich aus durch a) grössere Allgemeinheit, d.h. grössere Flexibilität in der Anwendbarkeit, b) die Möglichkeit der Geometrisierung der Probleme, wodurch die geometrische Intuition als Ideenquelle nutzbar gemacht werden kann, und c) durch die Beschränkung der Argumentation auf das wirklich Wesentliche und die genauere Durchleuchtung der wechselseitigen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Phänomenen.

Der Verfasser beschränkt sich im wesentlichen auf den im Titel des Buches genannten linearen Fall, vermittelt in den beiden Anhängen jedoch Ausblicke auf allgemeinere Situationen. Dafür wird den Anwendungen in konkreten Räumen grosses Gewicht beigemessen. Der dargestellte Stoff beruht hauptsächlich direkt auf wissenschaftlichen Originalarbeiten, welche vom Autor durchwegs zitiert werden. Die grosse Sorgfalt in Darstellung und Zitierweise macht das Buch lesbar für einen weiten Kreis von Mathematikern und lässt es als erwünschte Bereicherung der Literatur über Approximationstheorie erscheinen. J. Rätz

Basic Concepts of Probability and Statistics. Par J. L. Hodges, jr., et E. L. Lehmann. Second édition, 441 p. San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, Holden-Day International Student edition, 1970.

La seconde édition de cet ouvrage contient plusieurs chapitres nouveaux, de nombreux problèmes qui ne figuraient pas dans la première édition et la solution d'une partie des problèmes