Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 27 (1972)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Zur Lage in der modernen Mathematikdidaktik

Im Gedenken an Louis Locher-Ernst, † 15. 8. 1962

Die letzten Aufsätze, die der Begründer und erste Herausgeber dieser Zeitschrift veröffentlichte, galten Fragen, welche durch die heute allerorten in der Verwirklichung begriffene Modernisierung des Mathematikunterrichtes aufgeworfen werden [1]. Entsprechend seiner geistigen Prägung versuchte er, den selten deutlich ausgesprochenen nominalistisch-formalistischen Kern gewisser, die Modernisierung in einseitiger Richtung vorantreibender Denkweisen mit aller Deutlichkeit zu charakterisieren.

Nach zehn Jahren darf die Frage gestellt werden, wie weit die damaligen Charakteristiken auf das inzwischen vielerorts in der pädagogischen Praxis Verwirklichte zutreffen und inwieweit die unüberhörbaren Warnungen vor einem einseitigen Formalismus Gehör gefunden haben.

Zunächst ist zu bemerken, dass seither der Schwerpunkt der Auseinandersetzungen sich von der Gymnasialmathematik auf den Elementarunterricht verlagert hat, wo die mengentheoretische bzw. aussagenlogische Begründung der Zahlbegriffe und Rechenoperationen und der Einsatz von strukturiertem Material (Merkmalsklötze, Mini«computer» u. ä.) den Hauptgegenstand der Untersuchungen ausmachen. Für die didaktische Bearbeitung dieser Inhalte ist in Anlehnung an den Genfer Psychologen Jean Piaget die operative Methode zum leitenden Prinzip geworden.

Auf den ersten Blick scheint die von L. Locher-Ernst gegebene Charakterisierung einer rein formalen Methode für die moderne Elementarmathematik nicht zutreffend zu sein, denn nirgendwo treten formale Darstellungen von Strukturen und Schlussweisen explizit in Erscheinung. Welche Stellung im Einzelfall zu den grundlegenden Fragen mathematischen Denkens eingenommen wird, bleibt jedoch meist unausgesprochen. Für den Kenner ist aber die nominalistische Haltung an vielen Stellen unmittelbar sichtbar – etwa in der Einführung der Zahlbegriffe und Rechenoperationen [2]. In neueren Veröffentlichungen zeigt sich deutlich, dass die Frage nach der Begründung der Mathematik beim Kinde die Frage nach der Begründung der Mathematik als Wissenschaft immer stärker wachruft. Ein rein formaler Standpunkt genügt bei aller relativen Berechtigung für die Begründung wirklicher Begriffe im Kinde nicht. Es sei deshalb hier in Erinnerung an die Warnungen von L. Locher-Ernst mit aller Deutlichkeit wiederholt: Ohne eine klare Einsicht in die beschränkte Rolle des Formalismus und die darüber hinausgehende Reichweite des Denkens muss jeder Modernisierungsversuch auch des Elementarunterrichtes unbefriedigend bleiben. Statt wirklicher Begriffe treten als Folge formalistischen Denkens vielfach Ersatzkonstruktionen auf.

Die zunehmende Unsicherheit über eine wissenschaftlich zu rechtfertigende Methode, wie sie z. B. in der BRD auf der letzten Mathematikdidaktiker-Tagung in

Kiel bemerkbar wurde, zeigt unseres Erachtens, wie eine Besinnung, zu der L. Locher-Ernst bereits vor zehn Jahren an dieser Stelle aufrufen wollte, heute noch dringender als damals ist.

Ernst Schuberth, München

LITERATURVERZEICHNIS

[1] LOUIS LOCHER-ERNST, *Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik*, El. Math. *XVI*/5, 6 (1961), *XVII*/1 (1962) und *Neue Gestaltungen in der Behandlung der Mathematik*, El. Math. *XVII*/2 (1962).

[2] Vgl. z. B. auch ERNST SCHUBERTH, *Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts*, Stuttgart 1971.

Die seltsamen Würfel des Herrn Efron und eine Verallgemeinerung

Im Heft 12 (1970) des *Scientific American*, S. 110, gibt Gardner im Abschnitt «Mathematical games» die von Herrn Bradley Efron, Stanford, konstruierten Würfel an, die die Eigenschaft haben, dass bei unabhängigen Würfeln für ihre Augenzahlen gilt

$$P(A > B) = P(B > C) = P(C > D) = P(D > A) = \frac{2}{3}.$$

(Ausserdem kommt Gleichheit der Würfelwerte nicht vor.) Eine der dort zitierten Möglichkeiten für die Augenzahlen ist

A hat die Augenzahlen 0, 0, 4, 4, 4, 4,
B hat die Augenzahlen 3, 3, 3, 3, 3, 3,
C hat die Augenzahlen 2, 2, 2, 2, 6, 6,
D hat die Augenzahlen 1, 1, 1, 5, 5, 5.

Es wird darauf hingewisen, dass sich ähnlich drei unabhängige Zufallsgrössen finden lassen (allerdings nicht mit jeweils gleichwahrscheinlichen Ergebnismöglichkeiten) mit (vgl. [1])

$$P(X > Y) = P(Y > Z) = P(Z > X) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0{,}618\ldots > \frac{1}{2}.$$

Man kann dieses Ergebnis, eine Art «Stochastisches Paradoxon», so verwenden: man lässt den Mitspieler einen der Würfel wählen und findet dann in der Restmenge immer noch einen, der «besser» ist, mit dem man also den durch die Auswahlmöglichkeit Bevorzugten besiegen kann.

Wenn man auf den optimalen Wert der Gewinnwahrscheinlichkeit verzichtet, sind die einfachsten Würfel dafür die mit den Augenzahlen:

A: 1, 5, 9; B: 3, 4, 8; C: 2, 6, 7.

Hier soll diese Möglichkeit verallgemeinert werden auf den Fall von zwei Mitspielern, die jeder einen der Würfel auswählen dürfen und doch danach durch den-

selben Würfel der Restmenge «besiegt» werden können. Dazu verwende ich 7 Würfel (mit einer kleineren Anzahl ist das unmöglich!), die wie folgt auf ihren je 14 Seiten beziffert werden sollen:

1. Würfel: 1, 14, 20, 26, 32, 38, 44; 101, 113, 118, 123, 135, 140, 145.
2. Würfel: 2, 8, 21, 27, 33, 39, 45; 103, 108, 120, 125, 130, 142, 147.
3. Würfel: 3, 9, 15, 28, 34, 40, 46; 105, 110, 115, 127, 132, 137. 149.
4. Würfel: 4, 10, 16, 22, 35, 41, 47; 107, 112, 117, 122, 134, 139, 144,
5. Würfel: 5, 11, 17, 23, 29, 42, 48; 102, 114, 119, 124, 129, 141, 146.
6. Würfel: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 49; 104, 109, 121, 126, 131, 136, 148.
7. Würfel: 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43; 106, 111, 116, 128, 133, 138, 143.

Man rechnet dann leicht nach, dass

$$P(X_1 < X_2) = \frac{103}{196} > \frac{1}{2}, \quad P(X_1 < X_3) = \frac{99}{196} > \frac{1}{2},$$

$$P(X_1 > X_4) = \frac{99}{196} > \frac{1}{2}$$

und dass wegen der erkennbaren Regelmässigkeit der Zahlentabelle dieselben Wahrscheinlichkeiten auch gelten, wenn die Indizes gleichmässig erhöht werden (modulo 7 zu rechnen!).

Werden nun zwei dieser Würfel ausgewählt, so haben ihre Nummern (bei zyklischer Auffassung!) eine Differenz von 1,2 oder 3.

Bei Differenz 1 wählt man zu X_n, X_{n+1} den Würfel X_{n+2}.
Bei Differenz 2 wählt man zu X_n, X_{n+2} den Würfel X_{n+4}.
Bei Differenz 3 wählt man zu X_n, X_{n+3} den Würfel X_{n+4}.

So erhält man nach den früheren Wahrscheinlichkeitsungleichungen immer einen Würfel, der «besser» ist als jeder der beiden vorher gewählten.

Wenn man von der möglichen Fragestellung nach dem optimalen Wert der Gewinnwahrscheinlichkeit absieht, ist die Behandlung solcher Auswahlmöglichkeitsprobleme, etwa 17 Würfel so zu konstruieren, dass man zu je dreien von ihnen einen auswählen kann, der besser ist als jeder dieser drei, ein graphentheoretisches Problem; den Würfeln entsprechen dabei die Knoten, und der Beziehung $P(X > Z) > 1/2$ entspricht die gerichtete Kante $Z \to X$. Es gilt nämlich folgender **Satz**: Für jeden gerichteten Graphen gibt es den Knoten entsprechende Würfel so dass die Richtung $Z \to X$ der Aussage $P(X > Z > 1/2$ entspricht.

Der Beweis erfolgt leicht durch Zuordnung zweier Würfelflächennummern zu jeder gerichteten Kante $A\ B$, die bei insgesamt n Würfeln so beziffert werden sollen:

A: $n + 1, n + 2$. B: $n, n - 1$. Die anderen mit $k, n + 2 - k$ $(k = 1, \ldots n - 2)$. Für die anderen Kanten wird je eine hinreichend grosse Konstante addiert. (Diese allgemeine Beweismethode führt im obigen Fall von 7 Würfeln zu einem 42seitigen Würfel.)

Für die Erzeugung von 17 Würfeln mit 3 «Gegnern» bleibt dann also ein Graph aus 17 Knoten zu konstruieren, der die Eigenschaft besitzt, dass zu jedem Tripel von

Knoten ein weiterer Knoten existiert, so dass von ihm zu den drei ausgewählten gerichtete Kanten existieren. Dieses Problem scheint mir ungelöst.

D. Morgenstern, TU Hannover

LITERATURVERZEICHNIS

[1] USISKIN, *Max-Min-Probabilities in the Voting Paradox*. Ann. math. Stat. *35*, 857 (1964).

A Note on the Powers of 2-Connected Graphs

The nth power G^n, $n \geq 1$, of a connected graph G is that graph having the same vertex set as G and such that u and v are adjacent in G^n if and only if the distance between u and v in G is at most n. In recent years there have been a number of developments on the hamiltonian properties of powers of connected graphs. In 1966 Beineke (unpublished) proved that the cube of every connected graph of order at least three is hamiltonian. (It is easy to verify that the square of a connected graph of order three or more need not be hamiltonian.) This result was extended in [2] where it was shown that if G is a connected graph of order at least four, then $G^3 - v$ is hamiltonian for any vertex v of G. The concept of n-hamiltonian graphs was introduced in [4]: a graph G of order p is *n-hamiltonian*, $0 \leq n \leq p - 3$, if the removal of any k vertices from G, $0 \leq k \leq n$, results in a hamiltonian graph. Using this, the result in [2] then states that the cube of a connected graph of order $p \geq 4$ is 1-hamiltonian; and this was generalized in [1] for higher powers.

Theorem. If G is a connected graph of order p and $1 \leq n \leq p - 3$, then G^{n+2} is n-hamiltonian.

Nash-Williams and Plummer independently conjectured that the square of every 2-connected graph is hamiltonian. In 1971 Fleischner [5] showed the conjecture to be correct, and with the aid of Fleischner's result it was shown in [3] that the square of every 2-connected graph is 1-hamiltonian. It is the purpose of this note to present a generalization of this result.

Theorem. If G is a 2-connected graph of order p and $1 \leq n \leq p - 3$. then G^{n+1} is n-hamiltonian.

Proof. For $k \geq 0$ let V_k denote a k-element subset of the vertex set of G. We wish to show that if G is 2-connected, then $G^{n+1} - V_k$ is hamiltonian, $0 \leq k \leq n$. Observe that by [5] this is true for $k = 0$. Also, $G^2 \subseteq G^3 \subseteq \ldots \subseteq G^{k+1} \subseteq \ldots \subseteq G^{n+1}$; and thus it suffices to prove that if G is a 2-connected graph, then the graph $G^{k+1} - V_k$ is hamiltonian for $k = 1, 2, \ldots, p - 3$. Note that in view of [3] this holds when $k = 1$. Assume $k \geq 2$, and let $V_k = \{v\} \cup V_{k-1}$. Since G is 2-connected, the graph $G - v$ is connected. Moreover,

$$H = (G - v)^{k+1} - V_{k-1} \subseteq (G^{k+1} - V_{k-1}) - \{v\} = G^{k+1} - V_k .$$

By [1] the graph H is hamiltonian for $k \geq 2$, and therefore, so is the graph $G^{k+1} - V_k$.

S.F. Kapoor and Don R. Lick, Western Michigan University, USA

REFERENCES

[1] V. N. Bhat and S. F. Kapoor, *The Powers of Connected Graphs are Highly Hamiltonian*, J. Res. Nat. Bur. Stand. *75B*, 63–66 (1971).
[2] G. Chartrand and S. F. Kapoor, *The Cube of Every Connected Graph is 1-Hamiltonian*, J. Res. Nat. Bur. Stand. *73B*, 47–48 (1969).
[3] G. Chartrand and S. F. Kapoor, *The Square of Every 2-Connected Graph is 1-Hamiltonian*, to appear.
[4] G. Chartrand, S. F. Kapoor, and D. R. Lick, *n-Hamiltonian Graphs*, J. Combinat. Theory *9*, 308–312 (1970).
[5] H. Fleischner, *The Square of Every Nonseparable Graph is Hamiltonian*, to appear.

Aufgaben

Aufgabe 654. Man beweise die Richtigkeit der Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+r} = n!\sum_{1\le k_1\le\dots\le k_r\le n} k_1k_2\dots k_r \qquad (k_i\in N)$$

für $n = 1, 2, 3, \dots$ und $r = 0, 1, 2, \dots$ (für $r = 0$ habe die rechts stehende Summe den Wert 1).

O. Reutter, Ochsenhausen

Lösung: Es sei

$$F(r, n) = \sum_{1\le k_1\le\dots\le k_r\le n} k_1k_2\dots k_r \qquad (k_i\in N)\,.$$

Durch Betrachtung des Wertes von k_r findet man

$$F(r, n) = F(r, n-1) + nF\,(r-1, n)\,. \tag{1}$$

Aus $F(0, n) = F(r, 1) = 1$ und (1) kann man rekursiv alle $F(r, n)$ bestimmen. Für die Stirlingschen Zahlen zweiter Art gilt

$$S(n, n) = S\,(r+1, 1) = 1\ (n > 0, r \ge 0)$$

und

$$S\,(n+r, n) = S\,(n+r-1, n-1) + nS\,(n+r-1, n)\,, \tag{2}$$

(cf. J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, ch. 2. (37)). Weil die Anfangswerte und die Beziehungen (1) und (2) übereinstimmen, ist bewiesen:

$$F(r, n) = S\,(n+r, n)\,.$$

Weil auch

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+r} = S\,(n+r, n)$$

(J. Riordan, loc. cit. p. 43), ist die Behauptung bewiesen.

J. H. van Lint, Eindhoven