

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 27 (1972)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Zerlegungsähnlichkeit von Punktmengen  
**Autor:** Meier, Ch.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28635>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zerlegungsähnlichkeit von Punktmengen

Die Frage, wann zwei Punktmengen  $A$  und  $B$  des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $E^k$  in Teilmengen  $A_1, \dots, A_n$  bzw.  $B_1, \dots, B_n$  zerlegt werden können, so dass  $A_i$  und  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) kongruent sind, steht im Zentrum zahlreicher Betrachtungen z. B. im Zusammenhang mit Massproblemen. Die vielen, für die Anschauung zum Teil äusserst paradoxen Resultate findet man etwa bei Sierpiński [7] zusammengestellt; unter anderem das bekannte Theorem von Banach und Tarski [1], dass zwei beliebige beschränkte Punktmengen  $A$  und  $B$  des  $E^k$  ( $k \geq 3$ ) mit inneren Punkten «multikongruent» sind, d. h.  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ ,  $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$  ( $i \neq j$ ) und  $A_i$  kongruent  $B_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Im Zusammenhang mit analogen Problemen für Polyeder und endliche Zerlegungen in polyedrische Teilstücke hat Dehn [4] bewiesen, dass selbst inhaltsgleiche Polyeder für  $k \geq 3$  nicht notwendig «zerlegungsgleich» sind, und dadurch das dritte der 23 Hilbertschen Probleme gelöst. Der auffallende Gegensatz der Resultate [1] und [4] widerspiegelt den grundsätzlichen Unterschied zwischen der punktmengentheoretischen Zerlegung beliebiger Mengen (Partition) und der elementargeometrischen Zerlegung von Polyedern durch endlich viele ebene Schnitte unter Vernachlässigung der Randpunkte. Überblicke über diesen Themenkreis findet man bei H. Hadwiger [5] und [6].

H. Debrunner [3] hat die polyedrische Fragestellung unter einem neuen Gesichtspunkt, nämlich unter Berücksichtigung der Ähnlichkeit der Teilpolyeder, aufgegriffen und im Hinblick auf das Dehnsche Ergebnis überraschend gefunden, dass zwei beliebige eigentliche Polyeder  $P$  und  $Q$  stets so in endlich viele Teilpolyeder  $P_1, \dots, P_n$  bzw.  $Q_1, \dots, Q_n$  zerlegt werden können, dass  $P_i$  und  $Q_i$  für  $i = 1, \dots, n$  homothetisch ausfallen. Er nannte diese Beziehung zwischen  $P$  und  $Q$  «Zerlegungsähnlichkeit».

Parallel dazu wollen wir jetzt in dieser kleinen Note untersuchen, wann zwei Punktmengen  $A$  und  $B$  des  $E^k$  «zerlegungsähnlich» sind. Wir finden im Anschluss an ein sehr allgemeines Theorem von Banach [2] den

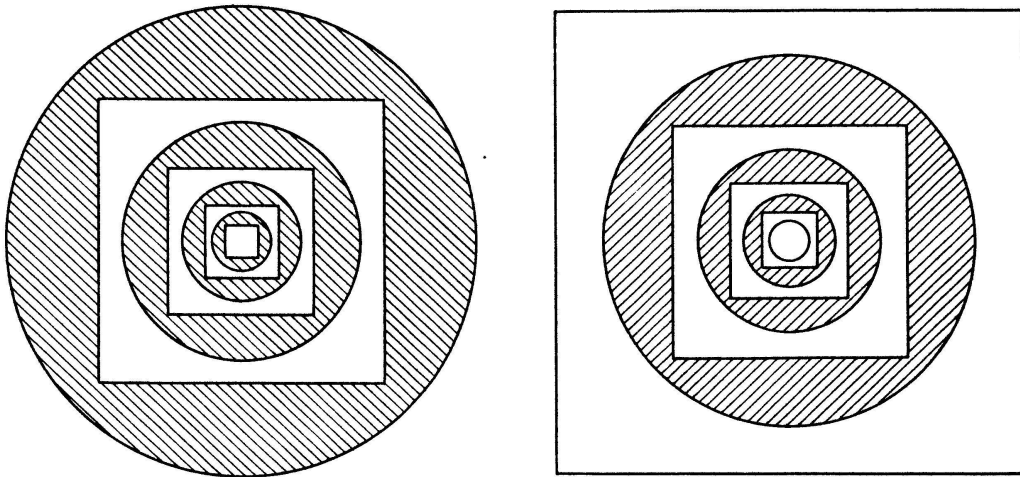
**Satz 1:** *Für zwei beliebige beschränkte Punktmengen  $A$  und  $B$  mit inneren Punkten existieren Zerlegungen  $A = A_1 \cup A_2$ ,  $B = B_1 \cup B_2$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  derart, dass für  $i = 1, 2$   $A_i$  mit  $B_i$  durch geeignete Dilatation und anschliessende Translation zur Deckung gebracht werden kann.*

Figur 1 illustriert diesen Sachverhalt anhand von Quadrat und Kreisfläche.

**Beweis:** Im Zusammenhang mit dem Cantor-Schröder-Bernsteinschen Äquivalenzsatz gilt folgender Zerlegungssatz für Mengen (Banach [2]):

Seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen,  $f_A: A \rightarrow B$  und  $f_B: B \rightarrow A$  zwei umkehrbar eindeutige Abbildungen von  $A$  bzw.  $B$  auf  $f_A(A) \subset B$  bzw.  $f_B(B) \subset A$ . Dann existieren Zerlegungen von  $A$  und  $B$  in je zwei Teilmengen  $A_1$  und  $A_2$  bzw.  $B_1$  und  $B_2$  mit

$$A_1 \cup A_2 = A, \quad B_1 \cup B_2 = B, \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2, \quad f_A(A_1) = B_1, \quad f_B(B_2) = A_2.$$



Figur 1

Wir wenden jetzt diesen Satz auf beschränkte Punktmengen  $A$  und  $B$  des  $E^k$  mit inneren Punkten an.

Seien  $M_A$  bzw.  $M_B$  die Radien der  $A$  und  $B$  enthaltenden Kugeln  $K_A$  bzw.  $K_B$ .  $\varepsilon_A$  bzw.  $\varepsilon_B$  seien die Radien der in  $A$  bzw.  $B$  enthaltenen Kugeln  $k_A$  bzw.  $k_B$ .

Dann lässt sich  $K_A$  nach Dilatation mit  $\lambda_A = \varepsilon_B/M_A$  mit  $k_B$  durch geeignete Translation  $t_A$  zur Deckung bringen. Ebenso verfahren wir mit  $K_B$  und  $k_A$  mittels  $\lambda_B = \varepsilon_A/M_B$  und  $t_B$ .  $t_A$  und  $t_B$  berechnen sich ohne weiteres aus den Ortsvektoren der Zentren der verwendeten Kugeln und aus  $\lambda_A$  bzw.  $\lambda_B$ .

Somit gilt wegen  $A \subset K_A$  bzw.  $B \subset K_B$  ( $\lambda C + t$  bezeichne die mit  $\lambda$  dilatierte und um  $t$  translatierte Menge  $C$ )

$$\lambda_A A + t_A \subset \lambda_A K_A + t_A = k_B \subset B \quad \text{und} \quad \lambda_B B + t_B \subset \lambda_B K_B + t_B = k_A \subset A.$$

Es bleibt noch zu erwähnen, dass die durch  $\lambda_A$  und  $t_A$  bzw.  $\lambda_B$  und  $t_B$  beschriebenen Abbildungen  $f_A$  bzw.  $f_B$  wegen  $\lambda_A \neq 0 \neq \lambda_B$  umkehrbar eindeutig sind, d. h. jedem  $a \in A$  bzw.  $b \in B$  wird umkehrbar eindeutig ein  $f_A(a) = \lambda_A a + t_A \in \lambda_A A + t_A$  bzw.  $f_B(b) = \lambda_B b + t_B \in \lambda_B B + t_B$  zugeordnet.

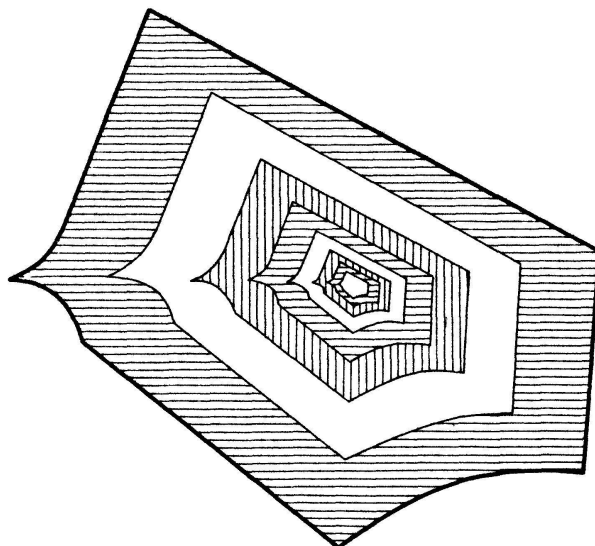
Also sind die Voraussetzungen des Satzes von Banach mit homothetischen Abbildungen erfüllt und die Behauptung erweist sich als geometrisches Korollar des Banachschen Theorems. Qed.

Mit ganz analogen Schlussweisen zeigen wir jetzt noch eine mit dem obigen eng verwandte Lösung der Aufgabe, auf welche Weise sich eine Punktmenge  $A$  des  $E^k$  in paarweise ähnliche Teilmengen zerlegen lässt.

**Satz 2:** Eine beliebige beschränkte Punktmenge  $A$  mit inneren Punkten lässt sich nach Wegnahme eines geeigneten Punktes  $p$  in  $n$  Teilmengen  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) zerlegen, derart dass  $A_i$  und  $A_j$  für alle  $i, j$  homothetisch sind und dass gilt

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \cup \{p\} = A, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Figur 2 deutet die Zerlegung einer Punktmenge in drei homothetische Teile an, wobei der Konvergenzpunkt der «Jahresringe» die Rolle des Punktes  $p$  übernimmt.



Figur 2

Wir wollen den Satz in Analogie zum zitierten Banachschen Theorem zuerst allgemein mengentheoretisch formulieren und dann erst geometrisch deuten. Der Satz lautet dann wie folgt:

Sei  $f: A \rightarrow A$  eine injektive und «fixmengenfreie» Abbildung von  $A \neq \emptyset$  in sich, d. h. aus  $f(a) = f(b)$  folgt  $a = b$  und es gibt keine Teilmenge  $B \subset A$  mit  $f(B) = B$ . Dann existiert eine Zerlegung von  $A$  in  $n$  Teilmengen  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) mit  $A_i = f^{i-1}(A_1)$  und  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ ).  $f^m$  bezeichnet [dabei die  $m$ -fach iterierte Abbildung  $f$  sowie  $f^0$  die Identität.

*Beweis:* Sei  $X_0$  die Menge aller Punkte von  $A$ , die nicht Bildpunkte von  $f$  sind, d. h. die Differenzmenge  $A - f(A)$ . Da  $f$  fixmengenfrei ist, gilt  $X_0 \neq \emptyset$ . Mit  $X_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) bezeichnen wir  $f^m(X_0) = \{y \mid y = f^m(x), x \in X_0\}$ . Es gilt

$$(*) \quad X_m \cap X_l = \emptyset \quad (m \neq l), \quad (**) \quad A = \bigcup_{m=0}^{\infty} X_m.$$

Zu (\*): Gegenannahme: Sei  $x = f^m(a) = f^l(b) \in X_m \cap X_l$  ( $m > l$ ) mit  $a, b \in X_0$ . Dann folgt wegen der Injektivität der Abbildungen  $a = f^{m-l}(b) = f(f^{m-l-1}(b)) = f(c) \in f(A)$  im Widerspruch zur Annahme  $a \in X_0 = A - f(A)$ .

Zu (\*\*): Wegen  $X_m \subset A$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) gilt  $A \supset \bigcup_{m=0}^{\infty} X_m$ . Sei  $B = A - \bigcup_{m=0}^{\infty} X_m$ .

Mit  $f(A) \cap X_0 = \emptyset = X_0 \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m\right)$  folgt aus  $f(B) = f\left(A - \bigcup_{m=0}^{\infty} X_m\right) = f(A) - \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$  (Verwendung der Injektivität und von  $f(X_m) = X_{m+1}$ ) die Gültigkeit von  $f(B) = (f(A) \cup X_0) - (X_0 \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m) = (f(A) \cup X_0) - \bigcup_{m=0}^{\infty} X_m$  und mit  $X_0 = A - f(A)$  gilt schliesslich  $f(B) = A - \bigcup_{m=0}^{\infty} X_m = B$ . Da  $f$  fixmengenfrei war, muss  $B = \emptyset$  gelten.

Wir fassen jetzt die Teilmengen  $X_m$  geeignet zusammen. Sei

$$A_i = \bigcup_{m=0}^{\infty} X_{(i-1)+nm} \quad (i = 1, \dots, n).$$

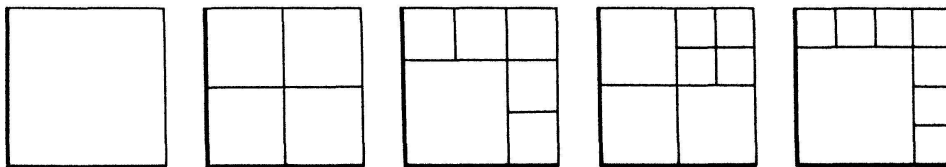
Dann gilt natürlich  $A_1 = \bigcup_{m=0}^{\infty} X_{nm}$  und  $A_i = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^{i-1}(X_{nm}) = f^{i-1}(A_1)$ , sowie

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \text{ und } A = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Spezialisieren wir auf unser geometrisches Problem, so finden wir wegen der Existenz einer  $\varepsilon$ -Kugel in  $A$  eine homothetische Abbildung, die die (beschränkte) Menge  $A$  in diese  $\varepsilon$ -Kugel abbildet. Die «Fixmengenfreiheit» erreichen wir durch Weglassen des Streckungszentrums der Homothetie. Mit der Bemerkung, dass eine iterierte Homothetie wieder eine Homothetie ist, schliesst der Beweis. Qed.

Wir können an diesem Ergebnis noch einige kleinere Modifikationen vornehmen. So gilt z. B. für abgeschlossene konvexe Mengen im Satz die Formulierung «...nach Wegnahme eines beliebigen Punktes  $p$ ...», während für offene konvexe Mengen sogar kein Punkt weggelassen werden muss, weil man als Streckungszentrum auch Randpunkte wählen darf.

Zum Schluss einige kleine und unvollständige Anregungen über endliche Zerlegungen, bei denen die  $n$  Teile zum Ganzen ähnlich sind. Derartige Zerlegungen existieren etwa für die halboffene Strecke oder die Cantorsche triadische Menge, wie man sogleich sieht. Andererseits gibt es Mengen, die sicher nicht in zum Ganzen ähnliche Stücke zerlegt werden können. Hier seien die abgeschlossene Strecke und jede endliche Punktmenge genannt. Endlich ist es möglich, das halboffene Quadrat mit Ausnahme von  $n = 2, 3, 5$  in  $n$  halboffene Teilquadrate zu zerlegen, wie Figur 3 belegt. Durch Vierteilung irgendeines der  $n$  Teilquadrate erreichen wir eine Zerlegung in  $n + 3$  Teile. Mit Angabe der Zerlegungen für  $n = 6, 7, 8$  sind somit alle  $n \geq 6$  erfasst.



Figur 3

Ch. Meier, Bern

#### LITERATUR

- [1] S. BANACH und A. TARSKI, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fundamenta math. 6, 244 (1924).
- [2] S. BANACH, *Un théorème sur les transformations biunivoques*. Fundamenta math. 6, 236 (1924).
- [3] H. E. DEBRUNNER, *Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern*. Elem. Math. 24, 1 (1969).
- [4] M. DEHN, *Über den Rauminhalt*. Math. Ann. 55, 465 (1901).
- [5] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 93 (Springer, Berlin 1957).
- [6] H. HADWIGER, *Neuere Ergebnisse innerhalb der Zerlegungstheorie euklidischer Polyeder*. Jber. dtsh. Math.-Ver. 70, 167 (1967).
- [7] W. SIERPIŃSKI, *On the Congruence of Sets and Their Equivalence by Finite Decomposition*. Lucknow, University Studies 20 (1954).