Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 27 (1972)
Heft: 5

Artikel: Die Polaritäten, die einen Torus in sich überführen
Autor: Hohenberg, Fritz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28634

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 27 Heft 5 Seiten 97-120 10. September 1972

Die Polaritäten, die einen Torus in sich überführen

Ordnung und Klasse des Torus sind gleich, nämlich 4. Man kann fragen, ob ein Torus durch die Polarität an einer Fläche 2. Ordnung in sich übergeführt werden kann. In 1. wird gezeigt, dass dies beim Dorntorus nicht möglich ist. *Beim Spindeltorus hingegen ergeben sich vier reelle Quadriken (drei einteilige und eine nullteilige), beim Ringtorus vier komplexe Quadriken, durch deren Polarität der Torus in sich übergeht.* Daraus folgen in 2. beim Spindeltorus und beim Ringtorus *Eigenschaften des Tangentenkomplexes, der Doppeltangentenkongruenz und der Haupttangentenkongruenz,* ferner in 3. *Zusammenhänge zwischen ebenen Schnitten und Tangentialkegeln* im allgemeinen Fall und in zahlreichen Sonderfällen. In 4. werden zwei jener Quadriken als absolute Fläche einer nichteuklidischen Metrik (des Cayley-Kleinschen projektiven Modells) gedeutet, so dass der (euklidische) Torus auch als *Torus der nichteuklidischen Metrik* aufgefasst werden kann und durch die absolute Polarität in sich übergeht. In 5. wird die *Transformation des Torus durch andere Polaritäten* untersucht und dabei auch der *Dorntorus* behandelt.

1. Polaritäten, die einen Spindel- oder Ringtorus in sich überführen

Bezeichnungen: Torus ϕ, Achse a, Mittelpunkt O, Radius R, des Mittenkreises m in der Mittenebene μ, Meridiankreisradius r, Knotenpunkte D_1, D_2 auf a im Abstand $d = \sqrt{r^2 - R^2}$ von O. Wir verwenden kartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3 (Ursprung O, Mittenebene $x_3 = 0$). In 1.–4. sei vorausgesetzt, dass ϕ ein Spindeltorus (d reell, $\neq 0$) oder Ringtorus (d rein imaginär, $\neq 0$) sei; der Dorntorus ($r = R$) wird in 5. untersucht.

Soll ϕ durch die Polarität an einer Quadrik φ in sich übergehen, so muss φ wegen der Symmetrie von ϕ bezüglich μ und wegen der Drehsymmetrie von ϕ bezüglich a offenbar eine Drehfläche mit der Achse a und dem Mittelpunkt O sein. φ habe die Gleichung

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{\alpha} + \frac{x_3^2}{\beta} = 1 . \tag{1}$$

Bestimmung von α. In jeder Meridianebene, z. B. in $x_2 = 0$, müssen die beiden Meridiankreise von ϕ durch Polarität am Meridian von φ entweder je in sich übergehen oder vertauscht werden. In $x_2 = 0$ liegen die Meridiankreise m_1 (Mitte, $(R, 0, 0)$)

und m_2 (Mitte $(-R, 0, 0)$). Soll m_1 durch die Polarität am Meridian von φ in sich übergehen, so muss dem Punkt $(R+r, 0, 0)$ von m_1 die Tangente im Punkt $(R-r, 0, 0)$ von m_1 entsprechen; daraus folgt $\alpha = R^2 - r^2 = -d^2$. Dann entspricht auch dem Punkt $(R-r, 0, 0)$ von m_1 die Tangente im Punkt $(R+r, 0, 0)$ von m_1. Auch entspricht jedem Schnittpunkt $(-R \pm r, 0, 0)$ von m_2 mit der x_1-Achse die Tangente von m_2 im anderen Punkt. – Soll hingegen m_1 durch die Polarität am Meridian von φ in m_2 (und umgekehrt) übergehen, so muss dem Punkt $(R+r, 0, 0)$ von m_1 die Tangente im Punkt $(-R+r, 0, 0)$ von m_2 entsprechen, daher muss $\alpha = -R^2 + r^2 = d^2$ sein. Dann entspricht dem Punkt $(R-r, 0, 0)$ von m_1 die Tangente im Punkt $(-R-r, 0, 0)$ von m_2.

Bestimmung von β. In jeder Meridianebene, z. B. in $x_2 = 0$, muss einem Schnittpunkt von m_1 und m_2 in der Polarität am Meridian von φ eine gemeinsame Tangente von m_1 und m_2 entsprechen, einerlei, ob m_1 und m_2 je in sich übergehen oder vertauscht werden. Einem Knotenpunkt $(0, 0, \pm d)$ von ϕ kann dabei, da φ zu a symmetrisch ist, nur die Schnittgerade einer Flachkreisebene $x_3 = \pm r$ mit $x_2 = 0$ entsprechen. Also ist $\beta = \pm dr$.

So ergeben sich die vier Quadriken $\varphi_{\varepsilon\eta}$

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{\varepsilon d^2} + \frac{x_3^2}{\eta d r} = 1, \quad \varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1 . \tag{2}$$

Beim Ringtorus sind die $\varphi_{\varepsilon\eta}$ komplex. Beim Spindeltorus (Abb.) ist $\varphi_{1,1}$ ein Ellipsoid, $\varphi_{-1,1}$ ein zweischaliges Hyperboloid, $\varphi_{1,-1}$ ein einschaliges Hyperboloid, $\varphi_{-1,-1}$ eine nullteilige Quadrik. Die Parameterdarstellung

$$x_1 = (R + r\cos u)\cos v, \quad x_2 = (R + r\cos u)\sin v, \quad x_3 = r\sin u \tag{3}$$

von ϕ zeigt, dass dem Punkt (u, v) von ϕ in der Polarität an $\varphi_{\varepsilon\eta}$ die Tangentialebene von ϕ im Punkt (u_1, v_1) entspricht, wobei

$$\sin u_1 = \frac{\eta d \sin u}{r + R\cos u}, \qquad \cos u_1 = -\frac{R + r\cos u}{r + R\cos u}, \qquad \operatorname{tg}\frac{u}{2}\operatorname{tg}\frac{u_1}{2} = \eta\sqrt{\frac{r+R}{r-R}}$$

und $v_1 = v + 180°$, wenn $\varepsilon = 1$, hingegen $v_1 = v$, wenn $\varepsilon = -1$ ist.

Durch Polarität an $\varphi_{1,1}$ oder $\varphi_{-1,1}$ geht $D_1(0, 0, d)$ in die Flachkreisebene $x_3 = r$ über, durch Polarität an $\varphi_{1,-1}$ oder $\varphi_{-1,-1}$ in $x_3 = -r$; analog bei $D_2\,(0, 0, -d)$. Durch Polarität an $\varphi_{1,1}$ oder $\varphi_{1,-1}$ vertauschen sich in jeder Meridianebene beide Meridiankreise von ϕ, durch Polarität an $\varphi_{-1,1}$ oder $\varphi_{-1,-1}$ gehen sie je in sich über.

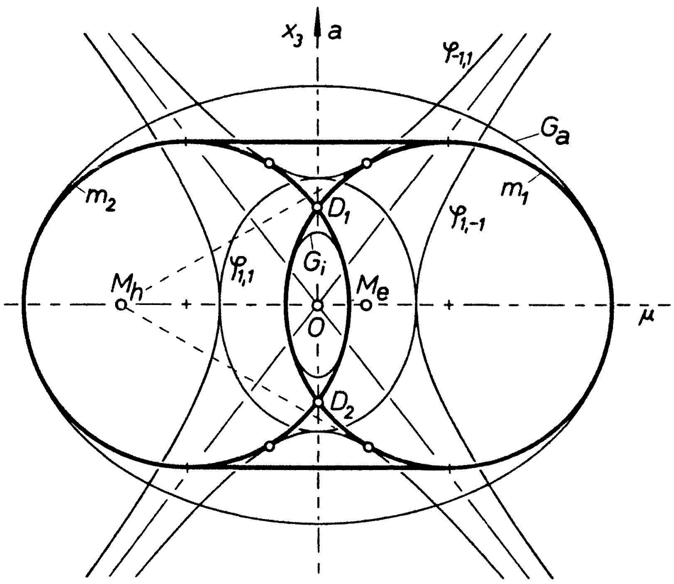
Einem Schnittpunkt von m_1 mit $\varphi_{-1,1}$ oder $\varphi_{-1,-1}$ entspricht eine Tangente von m_1, die mit dem Schnittpunkt inzidiert. *Daher berühren sich ϕ und $\varphi_{-1,1}$, ebenso ϕ und $\varphi_{-1,-1}$ längs zweier Parallelkreise;* diese haben den Radius $|R d/(d + \eta r)|$ und sie liegen in den Ebenen $x_2 = \pm\sqrt{2 r^2 d/(d + \eta r)}$. Die Erzeugenden (beider Scharen) von $\varphi_{-1,1}$ sind (komplexe) Doppeltangenten von ϕ, ebenso die Erzeugenden von $\varphi_{-1,-1}$.

Ferner zeigt sich: a) Die Zusammensetzung der Polaritäten an zwei verschiedenen Quadriken $\varphi_{\varepsilon\eta}$ ergibt die Spiegelung an a, wenn beide $\varphi_{\varepsilon\eta}$ dasselbe η besitzen, hingegen die Spiegelung an μ, wenn beide $\varphi_{\varepsilon\eta}$ verschiedene η besitzen. b) Durch die Polarität an *einer* Quadrik $\varphi_{\varepsilon\eta}$ geht *jede* Quadrik $\varphi_{\varepsilon\eta}$ in sich über.

2. Einfluss der Polaritäten auf den Tangentenkomplex eines Torus

Durch die Polarität an einer Quadrik $\varphi_{\varepsilon\eta}$ geht jeder Punkt von ϕ in eine Tangentialebene von ϕ über und umgekehrt. Daher gehen Tangenten in Tangenten über, Doppeltangenten in Doppeltangenten, Haupttangenten in Haupttangenten. *Der Tangentenkomplex, die Doppeltangentenkongruenz und die Haupttangentenkongruenz des Torus*[1]) *gestatten die Polaritäten an den vier Quadriken* $\varphi_{\varepsilon\eta}$.

Die durch Drehung einer Doppeltangente bzw. Haupttangente von ϕ um a entstehende Quadrik, l. c. «d-Fläche» bzw. «h-Fläche» genannt, hat in jeder Meridianebene von ϕ einen Meridian, der die Torusmeridiankreise in je zwei zu μ symmetrisch gelegenen Punkten berührt bzw. in je einem Punkt oskuliert. *Durch die Polaritäten an* $\varphi_{\varepsilon\eta}$ *gehen d-Flächen in d-Flächen, h-Flächen in h-Flächen über.* Insbesondere werden die Quadriken G_a und G_i (Abb.), deren Meridiane die Torusmeridiane in den Schnittpunkten mit der Mittenebene hyperoskulieren, durch die Polaritäten an den $\varphi_{\varepsilon\eta}$ miteinander vertauscht; G_a und G_i sind zugleich d-Flächen und h-Flächen von ϕ.



Beim Spindeltorus sind die $\varphi_{\varepsilon\eta}$ reell. Durch die Polaritäten an den $\varphi_{\varepsilon\eta}$ gehen reelle Haupttangenten in reelle Haupttangenten über. Den Erzeugenden des Tangentialkegels in einem Knotenpunkt entsprechen die Tangenten eines Flachkreises von ϕ.

3. Bemerkungen über ebene Schnitte und Tangentialkegel eines Torus

Durch die Polarität an einer Quadrik $\varphi_{\varepsilon\eta}$ geht die Schnittkurve c von ϕ mit einer Ebene γ in den Tangentialkegel ζ aus einem Punkt Z an ϕ über, und umgekehrt. *Daher ergeben sich aus Eigenschaften der ebenen Schnitte von* ϕ *Eigenschaften der*

[1]) Diese Strahlkongruenzen untersucht F. Hohenberg, Die Doppeltangenten und Haupttangenten des Torus, Monatsh. f. Math. *74*, 119–137 (1970). Bündelgrad und Feldgrad der Doppeltangentenkongruenz sind 4, wenn man die Geraden in den Flachkreisebenen und die Geraden in den Minimalebenen durch die Torusachse nicht zur Kongruenz rechnet. Bündelgrad und Feldgrad der Haupttangentenkongruenz sind 12.

Tangentialkegel von ϕ. ζ berührt ϕ längs des wahren Umrisses (Kontur) k von ϕ für das Auge Z und schneidet eine (nicht durch Z gehende) Bildebene π im scheinbaren Umriss k^c von ϕ für das Auge Z. Bei allgemeiner Lage von γ hat c die Ordnung 4 und die Klasse 8 und besitzt 2 Doppelpunkte auf dem absoluten Kegelschnitt, ferner 12 Wendepunkte; *daher hat* k^c *die Ordnung* 8, *die Klasse* 4, *das Geschlecht* 1 *und hat* 8 *Doppelpunkte* (*höchstens* 4 *reelle*), 12 *Spitzen* (*höchstens* 4 *reelle*), 2 *Doppeltangenten.*

Besondere Lagen von γ *führen zu besonderen Lagen von* Z. Ist z. B. γ parallel zu a, so ist c eine spirische Linie; Z liegt in μ.

Geht γ durch D_1, so ist D_1 ein dritter Doppelpunkt von c, und c hat die Klasse 6 und das Geschlecht 0. Dual liegt Z in einer Flachkreisebene, von k^c spaltet sich das Bild der Flachkreisebene (doppeltzählend) ab, daher hat k^c die Ordnung 6 und das Geschlecht 0. Wird ϕ von γ in D_1 berührt, so ist D_1 Spitze von c, und c hat die Klasse 5. Dual liegt Z auf einem Flachkreis, und k^c hat die Ordnung 5, das Geschlecht 0 und besitzt eine Wendetangente.

Berührt γ den Torus in einem Punkt allgemeiner Lage, so hat c dort einen dritten Doppelpunkt, daher die Klasse 6. Dual liegt Z auf ϕ, und k^c hat die Ordnung 6 und besitzt drei Doppeltangenten.

Berührt γ den Torus in einem Punkt der Mittenebene, so hat c dort einen Doppelpunkt mit Wendetangenten. Dual hat k^c, wenn Z auf einem Äquator oder Kehlkreis von ϕ liegt, eine Spitzendoppeltangente. Ist γ eine andere Tangentialebene von G_a oder G_i, so liegt Z auf G_i bzw. G_a, aber nicht in der Mittenebene; c hat zwei Flachpunkte, k^c hat zwei Spitzpunkte[2]).

Durch die Polarität an $\varphi_{\epsilon\eta}$ vertauschen sich der absolute Kegelschnitt (Doppelkurve von ϕ) und der Loxodromenkegel (Hüllkegel der Doppeltangentialebenen von ϕ). Ist γ eine Doppeltangentialebene von ϕ, so zerfällt c in zwei Loxodromenkreise von ϕ. *Dual zerfällt der Tangentialkegel von* ϕ *aus einem Punkt* Z *des absoluten Kegelschnitts in zwei Zylinder* 2. *Ordnung, und* k^c *zerfällt hier in zwei Kegelschnitte*[3]).

4. Deutung im projektiven Modell der nichteuklidischen Raumgeometrie

Die Ergebnisse gestatten einfache Deutungen im Cayley-Kleinschen (projektiven) Modell der nichteuklidischen Raumgeometrie. Um bei den üblichen Bezeichnungen bleiben zu können, setzten wir ϕ als Spindeltorus voraus und verwenden als absolute Fläche entweder $\varphi_{-1,1}$ oder $\varphi_{-1,-1}$.

1) *Hyperbolische Metrik, absolute Fläche* $\varphi_{-1,1}$. Da $\varphi_{1,1}$ mit $\varphi_{-1,1}$ ein Erzeugendenvierseit (4 Minimalgeraden durch die Schnittpunkte mit a) gemein hat, ist $\varphi_{1,1}$ eine Cliffordsche Fläche. $\varphi_{1,-1}$ und $\varphi_{-1,-1}$ berühren $\varphi_{-1,1}$ längs je eines Kegelschnitts, sie sind daher Kugeln bzw. Abstandsflächen der hyperbolischen Metrik; der hyperbolische Mittelpunkt von $\varphi_{1,-1}$ ist O, der von $\varphi_{-1,-1}$ ist der euklidische Fernpunkt von a.

---

[2]) Diese Bemerkungen können eine direkte Untersuchung (F. Hohenberg, Über den Zentralriss des Torus, Monatsh. f. Math., *75*, 123–135 (1971)) nicht ersetzen, denn sie sagen nichts über den Dorntorus aus und sie lassen beim Ringtorus die Realitätsverhältnisse ausser acht. Überdies erhält man durch Polarität nur projektive, nicht aber affine und metrische Eigenschaften der Umrisskurven.

[3]) F. Hohenberg, Projektion des Torus in isotroper Richtung, El. Math. *27*, 73–76 (1972).

Auch m_1 und m_2 berühren $\varphi_{-1,1}$ in je zwei Punkten, sie sind also in der hyperbolischen Metrik Kreise, und ϕ ist auch als Torus der hyperbolischen Metrik (mit der Drehachse a und den Meridianen m_1, m_2) aufzufassen; als Mittenkreis gilt hier der Kreis, der vom hyperbolischen Mittelpunkt M_h von m_1 (absoluter Pol der Berührungssehne von $\varphi_{-1,1}$ und m_1 in der Meridianebene) durchlaufen wird.

2) *Elliptische Metrik, absolute Fläche* $\varphi_{-1,-1}$. Da $\varphi_{1,-1}$ mit $\varphi_{-1,-1}$ ein Erzeugendenvierseit (4 Minimalgeraden durch die Schnittpunkte mit a) gemein hat, ist $\varphi_{1,-1}$ eine Cliffordsche Fläche. $\varphi_{1,1}$ und $\varphi_{-1,1}$ berühren $\varphi_{-1,-1}$ längs je eines Kegelschnitts, sie sind daher Kugeln der elliptischen Metrik; der elliptische Mittelpunkt von $\varphi_{1,1}$ ist O, der von $\varphi_{-1,1}$ ist der euklidische Fernpunkt von a.

Auch m_1 und m_2 berühren $\varphi_{-1,-1}$ in je zwei Punkten, sie sind also in der elliptischen Metrik Kreise, und ϕ ist auch als Torus der elliptischen Metrik (Drehachse a, Meridiane m_1, m_2) aufzufassen; der Mittenkreis entsteht durch Drehung des elliptischen Mittelpunkts M_e von m_1 (absoluter Pol der Berührungssehne von $\varphi_{-1,-1}$ und m_1 in der Meridianebene) um a.

C sei die Masskonstante der nichteuklidischen Metrik. ϱ sei der euklidische Winkel, den die Tangenten von ϕ in D_1 bzw. D_2 mit a einschliessen. Dann ergibt sich durch einfache Rechnungen:

Ist $\varphi_{-1,1}$ oder $\varphi_{-1,-1}$ die absolute Fläche, so sind die übrigen drei Quadriken $\varphi_{\varepsilon\eta}$ Kugeln bzw. Cliffordsche Flächen vom Radius $Ci\,\pi/2$. Der nichteuklidische Torus ϕ hat den Meridiankreisradius $Ci\,(2\varrho + \pi)/2$; der Mittenkreisradius ist bei hyperbolischer Metrik $Ci\,(\varrho + \pi)$, bei elliptischer Metrik $Ci\varrho$. (Bei der elliptischen Metrik mit $C = 1/2i$ sind diese Radien $\pi/4$ bzw. $(2\varrho + \pi)/4$ bzw. $\varrho/2$.)

5. Transformation des Torus durch andere Polaritäten

φ' sei nun eine beliebige Drehquadrik mit der Achse a und dem Mittelpunkt O. Durch die Polarität an φ' geht der Torus ϕ in eine Drehfläche 4. Ordnung ϕ' (Achse a, Mittelpunkt O, Meridiane = Kegelschnitte, die zur Mittenebene symmetrisch sind) über. Dem absoluten Kegelschnitt (Doppelkurve von ϕ) entspricht dabei der von den Doppeltangentialebenen von ϕ' eingehüllte Drehkegel (Spitze O, Achse a). Dem Loxodromenkegel eines Ringtorus ϕ entspricht, wenn φ' reell (einteilig oder nullteilig) ist, eine reelle Doppelkurve von ϕ', die in der Fernebene liegt. Den Flachkreisen von ϕ entsprechen Drehkegel (Achse a), die ϕ' in den konischen Knotenpunkten (auf a) berühren.

Ein Torus ist ϕ' genau dann, wenn ϕ ein Spindel- oder Ringtorus und φ' eine der vier zu ϕ gehörenden Quadriken $\varphi_{\varepsilon\eta}$ ist oder aus $\varphi_{\varepsilon\eta}$ durch Streckung aus O hervorgeht (denn die Streckung aus O ist mit der Polarität an $\varphi_{\varepsilon\eta}$ vertauschbar).

Im bisher ausgeschlossenen Fall des Dorntorus ($r = R$) ergibt sich durch Polarität an φ' eine Drehfläche 4. Ordnung, die durch Drehung einer Parabel um eine Parallele zu ihrer Scheiteltangente entsteht. Diese Fläche hat mit der Fernebene die (vierfach zählende) Ferngerade der Mittenebene gemein, und sie berührt sich längs dieser Geraden selbst. (Hingegen entsteht eine zu sich selbst duale Drehfläche 4. Ordnung, wenn eine Parabel um ihre Scheiteltangente rotiert; diese Fläche hat einen biplanaren Knotenpunkt wie ein Dorntorus.)

Fritz Hohenberg (Graz)