Aufgaben

Changing the variable from x to $\varrho\, x$ where $\varrho > 0$ is arbitrary and setting $a = \varrho^2\, e^{2i\alpha}$ (7) assumes the more compact form

$$\int_0^\infty e^{iax^2}\,dx = \frac{1+i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,, \quad a \neq 0\,,\ \operatorname{Im} a \geqq 0\,, \tag{8}$$

the principal value of $\sqrt{a}$ being taken on the right.

K. N. Srinivasa Rao, University of Mysore, India

REFERENCES

[1] E. T. Copson, *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, O.U.P. *1961*, p. 143.

[2] G. Sansone, J. Gerretsen, *Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable* (P. Noordhoff, Groningen 1960), p. 139–141.

Aufgaben

Aufgabe 647. Für eine streng monoton wachsende Folge (a_i) natürlicher Zahlen seien $A(n) = \sum_{a_i<n} 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\limsup A(n)/n$ $[n \to \infty]$ die *obere Dichte* und – im Falle der Existenz – $\lim A(n)/n$ $[n \to \infty]$ die *Dichte*. Man beweise:

a) Jede streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit oberer Dichte 1 besitzt eine unendliche Teilfolge, welche aus paarweise teilerfremden Zahlen besteht.

b) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es stets eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit Dichte $> 1 - \varepsilon$ derart, dass für keine ihrer unendlichen Teilfolgen die Glieder paarweise denselben grössten gemeinsamen Teiler haben.

P. Erdös, Budapest

Für die Lösung zu Teil a) vgl. diesen Band, p. 65.

Lösung zu Teil b): Zu jedem $\varepsilon > 0$ wollen wir eine streng monoton wachsende Folge (a_i) natürlicher Zahlen mit Dichte $> 1 - \varepsilon$ konstruieren derart, dass für jede natürliche Zahl d nur endlich viele verschiedene a_i paarweise den grössten gemeinsamen Teiler d haben.

Es sei $n_0 = n_0(\varepsilon)$ genügend gross. Eine natürliche Zahl a gehöre nun genau dann zur Folge (a_i), wenn gilt:

1) Der kleinste Primfaktor von a ist $\leq n_0$, und
2) ist $p_k | a$ und p_k nicht der grösste Primfaktor von a, dann hat a im Intervall $(p_k, e^{n_0 p_k^2})$ einen Primfaktor.

Wäre $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots.$ eine unendliche Teilfolge mit $(a_{i_{r_1}}, a_{i_{r_2}}) = d$ für $r_1 \neq r_2$, so würde gelten $a_{i_r} = d s_r$, $(s_{r_1}, s_{r_2}) = 1$. Also hätten die a_{i_r} beliebig grosse Primfaktoren, daher hätten unendlich viele unter ihnen einen Primfaktor im Intervall

$(d, e^{n_0 d^2})$, was zu $(s_{r_1}, s_{r_2}) = 1$ im Widerspruch steht. Damit ist die behauptete Teilfolgeneigenschaft nachgewiesen.

Wir bestimmen nun die Dichte der nicht zu (a_i) gehörenden Zahlen. Die Dichte der die Bedingung 1) nicht erfüllenden Zahlen ist

$$\prod_{p \leq n_0} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen

$$\frac{c_2}{\ln x} < \prod_{p<x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{c_1}{\ln x}$$

ist

$$\prod_{p<e^{n_0 p_k^2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{c_1}{n_0 p_k^2}$$

und

$$\prod_{p \leq p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \prod_{p<p_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > \frac{p_k - 1}{p_k} \cdot \frac{c_2}{\ln p_k} > \frac{c_2}{p_k},$$

also

$$\prod_{p_k<p<e^{n_0 p_k^2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{c_1}{n_0 p_k^2} \cdot \frac{p_k}{c_2} = \frac{c}{n_0 p_k}.$$

Für jede die Bedingung 2) nicht erfüllende Zahl a gibt es eine Primzahl p_k mit $p_k | a$ und $p \nmid a$ für alle Primzahlen p mit $p_k < p < e^{n_0 p_k^2}$. Es entsteht so ein Dichtebeitrag von

$$\left[1 - \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right] \prod_{p_k<p<e^{n_0 p_k^2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{c}{n_0 p_k^2},$$

so dass also die Dichte der die Bedingung 2) nicht erfüllenden Zahlen höchstens $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{n_0 p_k^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ beträgt. Somit ist die Dichte der nicht zu (a_i) gehörenden Zahlen $< \varepsilon$, also die Dichte von (a_i) wie behauptet $> 1 - \varepsilon$.

I. Ruzsa, Budapest

Anmerkung: Für verwandte Resultate weist P. Erdös auf folgende Arbeiten hin:

P. Erdös and A. Szemerédi, On a conjecture of P. Erdös and S. Stein. Acta Arithmetica *15* (1968) 85–90,

P. Erdös, Some remarks on prime factors of integers. Canad. J. Math. *11* (1959) 161–167.

Aufgabe 650. Man bestimme jene einer Ellipse eingeschriebenen Sechsecke, die durchwegs rechte Winkel aufweisen.

W. Wunderlich, Wien

Anmerkung der Redaktion: C. Bindschedler (Küsnacht, ZH) weist darauf hin, dass dieses Problem in Aufgabe 457 schon behandelt wurde; für eine Lösung wird auf El. Math. *19* (1964) 88–90 verwiesen.

K. Grün (Linz, Österreich) erzielte eine Verallgemeinerung auf $2n$-Ecke. In diesem Zusammenhang sei der Artikel des Aufgabenstellers, «Polygones orthogonaux inscrits dans une ellipse» im Bull. Soc. Math. Belgique *22* (1970) 416–423, erwähnt.
Eine weitere Lösung sandte W. Kienberger (Graz, Österreich).

Aufgabe 651. Für positive reelle Zahlen x, y, z beweise man die Ungleichung

$$9\,xyz \le (x^2 + y^2 + z^2)\,[xyz\,(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^2 - 2\,(x + y + z)]\,.$$

Gleichheit genau im Falle $x = y = z$. I. Paasche, München

Lösung: Es ist

$$xyz\,(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})^2 - 2\,(x + y + z) = x^{-1}yz + xy^{-1}z + xyz^{-1}\,. \tag{1}$$

Multipliziert man die Ungleichung zwischen dem harmonischen und dem arithmetischen Mittel von n positiven Zahlen

$$a_1, \dots, a_n \quad \text{mit} \quad n \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1},$$

so erhält man die Ungleichung

$$n^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^{-1}$$

(Gleichheit genau für $a_1 = \dots = a_n$).
Setzt man darin $n = 3$, $a_1 = x^2$, $a_2 = y^2$, $a_3 = z^2$, und multipliziert die so erhaltene Ungleichung mit xyz, so folgt unter Berücksichtigung von (1) die Behauptung (Gleichheit genau für $x^2 = y^2 = z^2$, d.h. für $x = y = z$). P. Hohler, Olten

Weitere Lösungen sandten H.J. Adèr (Amsterdam), A. Bager (Hjørring, Dänemark), L. Bankoff (Los Angeles, Ca., USA), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), P. Böttcher (Berlin-Tempelhof), H. Brändli (Zürich), J. Brejcha (Brno, ČSSR), P. Bundschuh (Freiburg i.Br., BRD), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), J. Fehér (Pécs, Ungarn), F. Götze (Jena, DDR), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Bottmingen, BL), L. Kieffer (Luxembourg), M.S. Klamkin (Dearborn, Michigan, USA), A. Makowski (Warszawa), H. Meyer (Birkerød, Dänemark), P. Nüesch (Lausanne), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD), K. Schuler (Rottweil, BRD), D. Suryanarayana (Waltair, India) und W.R. Umbach (Rottorf, BRD).

Anmerkung der Redaktion: H. Kappus erzielte folgende Verallgemeinerung: Seien $x_1, \dots, x_n > 0$ $(n \ge 3)$ und

$$P = \prod_{i=1}^{n} x_i\,, \quad Q = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\,, \quad R = \sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\,, \quad S = \sum_{i<j} \prod_{k \ne i,j} x_k\,.$$

Dann gilt

$$n^2\,P \le Q\,(PR^2 - 2S)$$

mit Gleichheit genau für $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Aufgabe 652. If n is a nonnegative integer and k a positive integer, define $p_k(n)$ by

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_k(n)x^n = \prod_{r=1}^{\infty} (1 - x^r)^k .$$

Prove the following:

a) If $12\,n + 1$ is not the sum of two squares of integers (i.e. a fortiori not a square itself), then $p_2(n) = 0$.

b) If $4n + 1$ is not the sum of two squares of integers (i.e. a fortiori not a square itself), then $p_6(n) = 0$.

J. Arkin, Nanuet, N.Y., USA

Solution:

(a). It follows from the identity (Euler)

$$\prod_{1}^{\infty} (1 - x^n) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \, x^{n(3n+1)/2}$$

that

$$p_2(n) = \sum (-1)^{a+b} ,$$

where the summation is over all integers a, b such that

$$\frac{1}{2} a \,(3a + 1) + \frac{1}{2} b \,(3b + 1) = n ,$$

that is,

$$(6a + 1)^2 + (6b + 1)^2 = 2\,(12n + 1) .$$

Since $12n + 1$ is not a sum of two squares, $2\,(12n + 1)$ is also not a sum of two squares and therefore $\mathrm{p}_2(n) = 0$.

(b). It follows from the identity (Jacobi)

$$\prod_{1}^{\infty} (1 - x^n)^3 = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \,(2n + 1)\, x^{n(n+1)/2}$$

that

$$p_6(n) = \sum (-1)^{a+b} \,(2a + 1)\,(2b + 1) ,$$

where the summation is over all nonnegative integers a, b such that

$$\frac{1}{2} a \,(a + 1) + \frac{1}{2} b \,(b + 1) = n ,$$

that is

$$(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = 2\,(4n + 1) .$$

Since $4n + 1$ is not a sum of two squares, $2\,(4n + 1)$ is also not a sum of two squares and therefore $p_6(n) = 0$.

L. Carlitz, Durham, N.C., USA

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht, ZH) und J. Fehér (Pécs, Ungarn).

Anmerkung der Redaktion: J. Fehér verwendet die Schlüsse

$$n = \frac{1}{2} a (3a + 1) + \frac{1}{2} b (3b + 1) \longrightarrow 12n + 1 = (3a + 3b + 1)^2 + (3a - 3b)^2 ,$$

$$n = \frac{1}{2} a (a + 1) + \frac{1}{2} b (b + 1) \longrightarrow 4n + 1 = (a + b + 1)^2 + (a - b)^2 .$$

Für die Identitäten von Euler und Jacobi vgl. z.B. G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford 1945, p. 282, 283.

Aufgabe 653. Es sei f eine auf dem halbabgeschlossenen Intervall $[0, 1)$ definierte reellwertige Funktion mit folgenden Eigenschaften: (1) f ist auf $[0, 1)$ stetig; (2) f ist auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ differenzierbar; (3) die Ableitung f' von f ist auf $(0, 1)$ beschränkt. Muss f an der Stelle 0 eine rechtsseitige Ableitung haben?

Th. Rychener, Bern

Lösung: Nein. Zum Beispiel ist die durch

$$f(0) = 0 , \quad f(x) = x \sin (ln\, x) \quad (x > 0)$$

definierte Funktion ersichtlich auf $[0, 1)$ stetig, ist in $(0, 1)$ sogar beliebig oft differenzierbar, und es ist dort

$$| f'(x) | = | \sin (ln\, x) + \cos (ln\, x) | \le \sqrt{2} .$$

Aber

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin (ln\, h) \quad (h > 0) ,$$

also hat f bei 0 keine rechtsseitige Ableitung.

E. Teuffel, Korntal, BRD

Weitere Lösungen sandten J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Meyer (Birkerød, Dänemark) und O. Reutter (Ochsenhausen, BRD).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. März 1973,** wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 664 A (Band 27, p. 19), Problem 672 A (Band 27, p. 68).

Aufgabe 673. Let Φ denote a permutation of $Z_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ and let $F(\Phi)$ denote the number of fixed points of Φ. Show that

$$\sum_{\Phi} (F(\Phi))^k = n!\, A_k \quad (0 \le k \le n)\,,$$

where A_k is the number of partitions of Z_k and the summation is over all permutations of Z_n.

L. Carlitz and R. A. Scoville, Durham, N.C., USA

Aufgabe 674. a, b, c seien die Seitenlängen eines Dreiecks. Ist $ax = b + c$, h_x die Höhe auf a rund r_x der Inkreisradius des Dreiecks, so gilt

$$2 < h_x^x (x r_x)^{-x} < e\,.$$

Man beweise diese Behauptung und zeige, dass die Schranken die bestmöglichen sind.

F. Leuenberger, Feldmeilen, ZH

Aufgabe 675. Man beweise für jedes Dreieck (mit den üblichen Abkürzungen) die folgende Kette von Ungleichungen:

$$4 \sum \tan \frac{\alpha}{2} \le \sqrt{3} + \sum \cot \frac{\alpha}{2} \le 2 \sum \csc \alpha\,,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Aufgabe 676. Mit Primzahlen p und natürlichen Zahlen n sei

$$\pi(n) := \sum_{p \le n} 1 \quad \text{und} \quad \varrho(n) := \sum_{\substack{(i,\,n)=1 \\ i = p \le n}} 1\,.$$

Welche Lösungen hat die Gleichung $n = \varrho(n) \cdot \sqrt{\pi(n)}$?

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Literaturüberschau

Hilbert Gedenkband. Herausgegeben von K. REIDEMEISTER. 86 Seiten mit 8 Abbildungen. 1 Schallplatte. Geheftet DM 22.– Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1971.

Dieser gediegen ausgestattete Gedenkband ist eine glückliche Ergänzung zum ausgezeichneten Buch von Constance Reid über Hilberts Leben und Wirken (vgl. die Rezension in El. Math. *26*, 24). Er enthält nach einer Einleitung des Herausgebers Hilberts Vortrag am Internationalen Mathematiker-Kongress 1928 in Bologna über «Probleme der Grundlegung der Mathematik». Der Erläuterung der Hilbertschen Auffassung von der Mathematik als einer Wissenschaft a priori dient der Aufsatz H. Weyl's «Über den Symbolismus der Mathematik und der mathematischen Physik». Natürlich durften in diesem Band die Gedenkreden Hilberts auf seine engen Freunde Hermann Minkowski und Adolf Hurwitz nicht fehlen. Als Abschluss sind Hilberts Bemerkungen «Über