Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 27 (1972)

Heft: 4

Artikel: Angeordnete affine Ebenen als Ebenen mit einem System von Halbgeraden, und euklidische Ebenen, die genau eine Anordnung besitzen

Autor: Uhl, Alfred

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28632

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Angeordnete affine Ebenen als Ebenen mit einem System von Halbgeraden, und euklidische Ebenen, die genau eine Anordnung besitzen

Einleitung: Unter einer affinen Ebene versteht man bekanntlich eine Punktmenge $\mathfrak{P} = \{A, B, \ldots\}$ mit einem System $\mathfrak{G} = \{a, b, \ldots\}$ von Teilmengen – den Geraden, das die drei folgenden Forderungen erfüllt: Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die diese Punkte enthält. Ist g eine Gerade und P ein Punkt, so gibt es genau eine Parallele h zu g (d.h. eine Gerade h mit $h = g$ oder $h \cap g = \emptyset$), die P enthält. Es gibt drei Punkte, die nicht ein und derselben Geraden angehören.

Eine affine Ebene heisst angeordnet, wenn eine dreistellige Relation – die Zwischenrelation – auf der Punktmenge erklärt ist, die gewisse Axiome erfüllt (siehe Hilbert [3]). Mehrere Kennzeichnungen der angeordneten Ebenen sind bekannt, bei denen die Forderungen über die Zwischenrelation durch andere Axiome ersetzt sind (siehe z.B. Karzel und Ellers [4]).

Im folgenden wird eine Einführung der Anordnung in affinen Ebenen gegeben, die vom Begriff der Halbgeraden ausgeht und sich auf zwei Axiome stützt. Für eine desarguessche angeordnete Ebene A wird ein Beweis des bekannten Satzes geführt: Die Anordnung von A induziert eine Anordnung des Koordinatenschiefkörpers F von A. Dabei ergibt sich der Positivbereich F^+ von F als Gruppe der richtungerhaltenden Automorphismen der Translationsgruppe T von A[1]). Bemerkenswert ist vielleicht noch, dass sich das Stetigkeitsaxiom allein mit Hilfe des Grundbegriffs «Halbgerade» formulieren lässt. Im letzten Paragraphen werden euklidische Ebenen (im Sinn von Bachmann [2]) betrachtet. Durch metrische Eigenschaften wird eine Klasse euklidischer Ebenen ausgezeichnet, die genau eine Anordnung zulassen.

§ 1. Angeordnete affine Ebenen als Ebenen mit Halbgeradensystem

Definition: Eine affine Ebene $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ heisst angeordnet, wenn zu jedem inzidenten Paar $P, g (P \in \mathfrak{P}, g \in \mathfrak{G})$ zwei Teilmengen $g'(P), g''(P)$ von g mit einer Mächtigkeit > 1 so gegeben sind, dass $g'(P) \cup g''(P) = g$, $g'(P) \cap g''(P) = \{P\}$ ist und die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ der gegebenen Teilmengen den Axiomen A_1, A_2 genügt.

Bezeichnungen: Jede der beiden zum Paar P, g gehörigen Mengen aus $\mathfrak{A}$ heisst Halbgerade von g mit Randpunkt P oder kurz P-Halbgerade von g. Jedes geordnete Paar (R, S) verschiedener Punkte legt die Verbindungsgerade $g = RS$ und jene R-Halbgerade von g, die S enthält, eindeutig fest. Sie wird mit $[RS\rangle$ bezeichnet. Wenn im folgenden das Zeichen $[XY\rangle$ auftritt, ist damit stets auch ausgesagt, dass $X \neq Y$ ist. Offenbar gilt: $T \in [RS\rangle$, $T \neq R \Leftrightarrow [RS\rangle = [RT\rangle$.

---

[1]) Dabei heisst ein Automorphismus α von T richtungerhaltend, wenn für jede Translation $\mathfrak{x} \neq v\,\mathfrak{x}$ und $\alpha\,\mathfrak{x}$ die gleichen Halbgeraden in sich abbilden.

Axiome der Anordnung:

A_1) Ist $[RS\rangle$ eine Halbgerade von g und σ eine Parallelprojektion[2]) von g auf eine Gerade h, so ist $\sigma([RS\rangle)$ eine Halbgerade von h mit Randpunkt σR.

A_2) Sind σ, τ zwei Parallelprojektionen einer Geraden g auf eine Parallele h zu g und g' eine Halbgerade von g, so gilt:

$$\sigma(g') \supset \tau(g') \quad \text{oder} \quad \sigma(g') \subset \tau(g').$$

Eine angeordnete affine Ebene heisst stetig angeordnet, wenn sie das *Stetigkeitsaxiom* erfüllt:

S) Ist H eine nichtleere Untermenge einer Halbgeraden $[RS\rangle$, so ist der Durchschnitt aller Halbgeraden, die in $[RS\rangle$ enthalten sind und H umfassen, wieder eine Halbgerade.

Es ist leicht einzusehen, dass die obige Definition der angeordneten affinen Ebenen äquivalent ist zu der von Karzel und Ellers in [4] angegebenen Definition.

Für den Beweis des in der Einleitung angekündigten Satzes werden nun drei Hilfssätze bereitgestellt.

1. Ist $[RS\rangle$ eine Halbgerade von g und $P \in g$, $P \notin [RS\rangle$, so gilt $[RS\rangle \subset [PR\rangle$.

Beweis: R', S' seien die Bilder von R bzw. S bei einer Parallelprojektion σ von g auf eine Parallele $h \neq g$ zu g. Mit der Parallelprojektion τ von h auf g, die R' in P überführt, gilt nach A_2: $[P\tau S'\rangle \supset [RS\rangle$. Dies führt zu $R \in [P\tau S'\rangle$, also wegen $R \neq P$ zu $[P\tau S'\rangle = [PR\rangle$ und damit zur Behauptung.

2. Aus $[PQ\rangle = [RS\rangle$ folgt $P = R$. Mit andern Worten: jede Halbgerade hat genau einen Randpunkt.

Beweis: Unter der Annahme $R \neq P$ ergibt sich $[PR\rangle = [RP\rangle$ aus $[PQ\rangle = [RS\rangle$. Für einen (nach der Definition der Halbgeraden existierenden) Punkt $T \notin [PR\rangle$ von $g = PR$ ist $[PT\rangle \cap [PR\rangle = \{P\}$ also $R \notin [PT\rangle$ und wegen 1 $T \in [RP\rangle$ im Widerspruch zu $[RP\rangle = [PR\rangle$.

3. $[PQ\rangle \underset{\neq}{\supset} [QR\rangle$ impliziert $P \notin [QR\rangle$.

Beweis: Wegen $P \neq Q$ führt die Annahme $P \in [QR\rangle$ auf $[QR\rangle = [QP\rangle$. Für die von $[PQ\rangle$ verschiedene P-Halbgerade g' von $g = PQ$ gilt $Q \notin g'$ und nach 1 $[QP\rangle \supset g'$. Dies ergibt $[PQ\rangle \supset g'$, was wegen $[PQ\rangle \neq g$ nicht möglich ist.

§ 2. Die richtungerhaltenden Automorphismen der Translationsgruppe T

Für alle weiteren Überlegungen wird eine angeordnete affine Ebene zugrunde gelegt, die zugleich Translationsebene ist. Es gibt dann zu je zwei Punkten P, Q genau eine Translation $\mathfrak{a}$ in der Gruppe T der Translationen mit $\mathfrak{a}(P) = Q$.

Definition: Zwei Translationen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathsf{T}^* = \mathsf{T} \setminus \{v\}$ heissen parallel (in Zeichen $\mathfrak{x} \parallel \mathfrak{y}$), wenn sie die gleichen Spuren (d.h. Fixgeraden) haben. $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathsf{T}^*$ heissen gleichgerichtet ($\mathfrak{x} \Uparrow \mathfrak{y}$), wenn für alle Punkte P gilt: $[P\,\mathfrak{x}(P)\rangle = [P\,\mathfrak{y}(P)\rangle$.

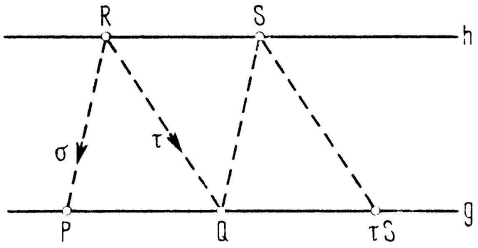
Offensichtlich sind die Relationen $\parallel$ und $\Uparrow$ Äquivalenzrelationen auf T^*, und aus $\mathfrak{x} \Uparrow \mathfrak{y}$ folgt stets $\mathfrak{x} \parallel \mathfrak{y}$.

---

[2]) Parallelprojektion von g auf h bedeutet hier stets eine Abbildung $\sigma: g \to h$, bei der P, σP einer Parallelen zu einer festen Geraden r gehören, die weder zu g noch zu h parallel ist.

4. Ist $P \in \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{a} \in T^*$, so ist $\mathfrak{a}([P\,\mathfrak{a}(P)\rangle)$ eine in $[P\,\mathfrak{a}(P)\rangle \setminus \{P\}$ enthaltene Halbgerade.

Beweis: Es seien g die Spur von $\mathfrak{a}$ durch P, $h \neq g$ eine weitere Spur von $\mathfrak{a}$, $R \in h$, $S = \mathfrak{a}(R)$ und σ, τ die Parallelprojektionen von h auf g mit $\sigma(R) = P$, $\tau(R) =$



$\mathfrak{a}(P) =: Q$. Die Restriktion von $\mathfrak{a}$ auf g stimmt offenbar mit $\tau \cdot \sigma^{-1}$ überein, so dass $\mathfrak{a}([PQ\rangle)$ die Halbgerade $\tau([RS\rangle) = [Q\tau S\rangle$ ist. Nach A_2 ist eine von den Halbgeraden $\sigma([RS\rangle)$, $\tau([RS\rangle)$ Obermenge der andern. Da $[Q\tau S\rangle$ nicht $[PQ\rangle$ enthalten kann – sonst wäre $[Q\tau S\rangle = [QP\rangle$ Obermenge von $[PQ\rangle$ entgegen 3 – ist $[Q\tau S\rangle \subset [PQ\rangle$ und nach 3 $P \notin [Q\tau S\rangle$.

5. Sind $\mathfrak{a}, \mathfrak{x} \in T^*$ und ist $\mathfrak{x} \parallel \mathfrak{a}$, so gilt genau einer der Beziehungen: $\mathfrak{x} \Uparrow \mathfrak{a}, \mathfrak{x} \Uparrow -\mathfrak{a}$.

Beweis: Die zu $\mathfrak{a}$ inverse Translation $-\mathfrak{a}$ ist nicht mit $\mathfrak{a}$ gleichgerichtet. Denn für $P \in \mathfrak{P}$ bildet $-\mathfrak{a}$ die Teilmenge $\mathfrak{a}([P\,\mathfrak{a}(P)\rangle)$ von $[P\,\mathfrak{a}(P)\rangle \setminus \{P\}$ auf $[P\,\mathfrak{a}(P)\rangle$ ab, kann also als Injektion den Punkt P nicht in einen Punkt von $[P\,\mathfrak{a}(P)\rangle$ überführen. Es bleibt zu zeigen, dass wenigstens eine der angegebenen Beziehungen gilt. Dazu sei $P \in \mathfrak{P}$ und g die Spur von $\mathfrak{a}$ durch P. Da $\mathfrak{x}(P)$ wegen $\mathfrak{x} \parallel \mathfrak{a}$ auf g liegt und damit einer der beiden P-Halbgeraden $[P\,\mathfrak{a}(P)\rangle$, $[P\,(-\mathfrak{a})\,(P)\rangle$ von g angehört, genügt es zu zeigen: Aus $\mathfrak{x}(P) \in [P\,\mathfrak{a}(P)\rangle$ folgt $\mathfrak{x}(Z) \in [Z\,\mathfrak{a}(Z)\rangle$ für alle Z. Sei h die Spur von $\mathfrak{a}$ durch Z und zunächst $h \neq g$. Dann führt die Parallelprojektion $\sigma\colon g \to h$ mit $\sigma P = Z$ den Punkt $\mathfrak{x}(P) \in [P\,\mathfrak{a}(P)\rangle$ in den Punkt $\mathfrak{x}(Z)$ über, und dieser liegt nach A_1 in $\sigma([P\,\mathfrak{a}(P)\rangle) = [Z\,\mathfrak{a}(Z)\rangle$. Genauso kommt man im Fall $h = g$ zum Ziel, wenn man anstelle von P einen Punkt $Z \notin g$ verwendet.

Aus (4) folgt unmittelbar:

6. Sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathsf{T}^*$ und ist $\mathfrak{x} \Uparrow \mathfrak{y}$, so ist $\mathfrak{x} \Uparrow \mathfrak{x} + \mathfrak{y}$.

Definition: Ein Automorphismus α von T heisst spurerhaltend, wenn $\alpha\,\mathfrak{x} \parallel \mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x}$, und richtungerhaltend, wenn $\alpha\,\mathfrak{x} \Uparrow \mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathsf{T}^*$.

Wie in [1] gezeigt wird, ist eine desarguessche affine Ebene isomorph einer affinen Ebene über einem Schiefkörper F. Dabei ist die multiplikative Gruppe $(\mathsf{F}^*, \cdot)$ von $\mathsf{F} = \mathsf{F}^* \cup \{0\}$ die Gruppe der spurerhaltenden Automorphismen von T (mit dem Hintereinanderausführen der Abbildungen als Verknüpfung) und 0 der Endomorphismus $\mathsf{T} \to \mathsf{T}$, $\mathfrak{x} \to v$. Für $\alpha, \beta \in \mathsf{F}$ ist die Abbildung $\gamma(\alpha, \beta)\colon \mathsf{T} \to \mathsf{T}$, $\mathfrak{x} \to \alpha\,\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{x}$ wieder in F, und man erhält die additive Gruppe von F durch die Definition: $\alpha + \beta = \gamma(\alpha, \beta)$.

7. Ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ eine angeordnete desarguessche affine Ebene, so ist die Klasse F^+ der richtungerhaltenden Automorphismen der Translationsgruppe T ein Positivbereich im Koordinatenschiefkörper F. Das heisst F^+ hat die Eigenschaften:

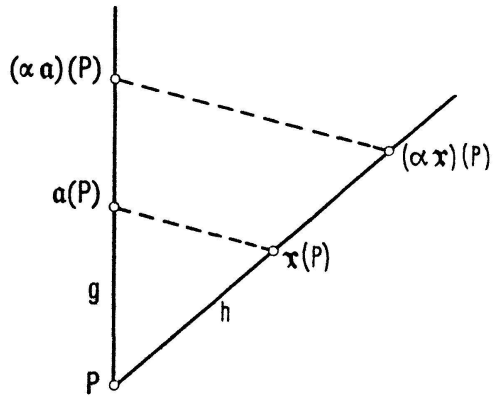
a) $0 \notin \mathsf{F}^+$. Für jedes Element $\alpha \in \mathsf{F}^* := \mathsf{F} \setminus \{0\}$ gilt entweder $\alpha \in \mathsf{F}^+$ oder $-\alpha \in \mathsf{F}^+$.

b) Aus $\alpha, \beta \in \mathsf{F}^+$ folgt stets: $\alpha + \beta \in \mathsf{F}^+$ und $\alpha \cdot \beta \in \mathsf{F}^+$.

Beweis: Da $\Uparrow$ eine Äquivalenzrelation ist, folgt die erste der Bedingungen unter b) aus 6 und die zweite aus der Definition von $(\mathsf{F}^+, \cdot)$.

Zu a). Es sei $\alpha \in \mathsf{F}^*$ und $\mathfrak{a}$ ein fester Vektor aus T^*. Dann ist $\alpha\,\mathfrak{a} \parallel \mathfrak{a}$ und nach 5 entweder $\alpha\,\mathfrak{a} \Uparrow \mathfrak{a}$ oder $(-\alpha)\,\mathfrak{a} \Uparrow \mathfrak{a}$. Es genügt also zu zeigen: Aus $\alpha\,\mathfrak{a} \Uparrow \mathfrak{a}$ für eine Translation $\mathfrak{a} \in \mathsf{T}^*$ folgt $\alpha\,\mathfrak{x} \Uparrow \mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{x} \in \mathsf{T}^*$.

Dazu seien P ein beliebiger Punkt und g bzw. h die Spuren von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{x}$ durch P und zunächst $h \neq g$. Von den zueinander parallelen Translationen $\mathfrak{x} - \mathfrak{a}$, $\alpha\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{a})$



führt die erste $\mathfrak{a}(P)$ in $\mathfrak{x}(P)$ und die zweite $(\alpha\,\mathfrak{a})\,(P)$ in $(\alpha\,\mathfrak{x})\,(P)$ über. Nach A_1 liegen also $\mathfrak{x}(P)$ und $(\alpha\,\mathfrak{x})\,(P)$ auf der gleichen P-Halbgeraden von h, da $\mathfrak{a}(P)$ und $(\alpha\,\mathfrak{a})\,(P)$ auf der gleichen P-Halbgeraden von g sind. Daher gilt $\alpha\,\mathfrak{x} \Uparrow \mathfrak{x}$. Ist $h = g$, so kommt man auf den eben behandelten Fall, wenn man $\mathfrak{a}$ ersetzt durch eine Translation $\mathfrak{a}' \in \mathsf{T}^*$ mit $\mathfrak{a}' \not\parallel \mathfrak{a}$.

Bemerkungen: Der Positivbereich F^+ bestimmt eine Anordnung des Schiefkörpers F: Auf F wird die Relation $<$ definiert: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha \in \mathsf{F}^+$. $<$ hat die Eigenschaften einer Ordnungsrelation:

a) Für $\alpha, \beta \in \mathsf{F}$ gilt stets genau eine der Beziehungen: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$.

b) $\alpha < \beta,\ \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.

$(\mathsf{F}, <)$ ist ein angeordneter Schiefkörper, das heisst ausser a) und b) gilt für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{F}$ stets:

c) $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$ und

d) $\alpha < \beta$ und $0 < \gamma \Rightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$ und $\gamma\alpha < \gamma\beta$.

Ein angeordneter Schiefkörper heisst vollständig, wenn gilt:

V) Jede nach oben beschränkte Teilmenge $\mathsf{H} \neq \emptyset$ von F hat eine obere Grenze (Vollständigkeitsaxiom). Ein angeordneter Schiefkörper F heisst archimedisch angeordnet, wenn es zu $\alpha \in \mathsf{F}$ stets eine Summe $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 =: n$ gibt mit $\alpha < n$. Jeder archimedisch angeordnete Schiefkörper ist kommutativ (siehe Artin [1], Theorem 1.18). Genügt ein angeordneter Schiefkörper dem Vollständigkeitsaxiom, so ist er (wie leicht zu sehen) archimedisch angeordnet, folglich kommutativ und erfüllt somit alle Axiome des reellen Zahlkörpers.

8. Ist A eine stetig angeordnete desarguessche affine Ebene, so ist ihr Koordinatenschiefkörper F isomorph zum Körper der reellen Zahlen.

Beweis: Nach den Vorbemerkungen genügt es zu zeigen, dass F aufgrund des Stetigkeitsaxioms vollständig ist. Dazu wird für eine durch 0 nach unten beschränkte Teilmenge $\mathsf{B} \neq \emptyset$ von F die Existenz der unteren Grenze nachgewiesen. (Eine durch σ

nach oben beschränkte Teilmenge $\mathsf{H} \neq \emptyset$ von F hat genau dann eine obere Grenze, wenn die durch 0 nach unten beschränkte Menge $\mathsf{H}' := \{\sigma - \alpha \mid \alpha \in \mathsf{H}\}$ eine untere Grenze hat.)

Es sei $[P\,\mathfrak{x}(P)\rangle$ eine Halbgerade in A. Dann gilt $\emptyset \neq \mathsf{B}' := \{(\beta\,\mathfrak{x})(P) \mid \beta \in \mathsf{B}\} \subset [P\,\mathfrak{x}(P)\rangle$, weil $\beta \in \mathsf{B} \Rightarrow 0 \leqslant \beta$. Weil S) gilt, ist der Durchschnitt aller Halbgeraden, die in $[P\,\mathfrak{x}(P)\rangle$ enthalten sind und B' umfassen, eine Halbgerade $[RS\rangle$. Wegen $[RS\rangle \subset [P\,\mathfrak{x}(P)\rangle$ gibt es ein $\tau \geqslant 0$ mit $(\tau\,\mathfrak{x})\,(P) = R$, und es gilt:

$$[RS\rangle = \{((\tau + \alpha)\,\mathfrak{x})\,(P) \mid \alpha \geq 0\} \supset \mathsf{B}'.$$

Dies zeigt, dass τ untere Schranke von B ist. Für jede untere Schranke γ von B ist $\gamma \leqslant \tau$, weil die Halbgerade $\{((\gamma + \alpha)\,(\mathfrak{x})\,(P) \mid \alpha \geqslant 0\}$ die Menge B' enthält und deshalb nicht echte Teilmenge von $[RS\rangle$ sein kann.

Bemerkung: Eine affine Ebene über einem angeordneten Schiefkörper lässt sich anordnen durch Vorgabe der Mengen $\{(\alpha\,\mathfrak{x})\,(A) \mid \alpha \geqslant 0\}$ $(\mathfrak{x} \in \mathsf{T}^*)$ als Halbgeraden.

§ 3. Euklidische Ebenen, die genau eine Anordnung zulassen

Der Begriff euklidische Ebene wird hier im Sinn von Bachmann [2] verwendet und kann folgendermassen erklärt werden. $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G})$ sei eine affine Ebene. Es sei eine symmetrische Relation $\perp \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ – die Orthogonalitätsrelation – gegeben. Für $(g, h) \in \perp$ wird $g \perp h$ geschrieben und g heisst dann senkrecht zu h oder auch ein Lot von h. Das Tripel $[\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \perp]$ heisst euklidische Ebene, wenn die folgenden vier Axiome erfüllt sind:

O_1) Ist $g \in \mathfrak{G}$, so bilden die Lote von g ein Parallelbüschel, dem g nicht angehört.

O_2) Parallele Geraden haben die gleichen Lote.

S_1) Zu jeder Geraden g gibt es genau eine involutorische Bijektion $\bar{g}$: $\mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$ – die Spiegelung an g – die g punktweise fest lässt, Geraden in Geraden überführt und die Orthogonalität erhält.

S_2) Haben drei Geraden a, b, c einen Punkt oder ein Lot gemein, so ist die Produktabbildung $\bar{c} \cdot \bar{b} \cdot \bar{a}$ wieder eine Geradenspiegelung $\bar{d}$[3]).

In [2], Kapitel IV, finden sich die folgenden Ergebnisse, an die die weiteren Überlegungen anknüpfen. In einer euklidischen Ebene E gelten der affine Satz von Pappus und das Axiom von Fano. E hat daher (als affine Ebene) einen kommutativen Koordinatenkörper K mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik. Es werden unter anderm euklidische Ebenen betrachtet, die das folgende Zusatzaxiom über die Existenz von «Winkelhalbierenden» erfüllen:

W) Zu je zwei Geraden a, b gibt es eine Gerade w mit $\bar{w}(a) = b$.

Wenn eine euklidische Ebene die Bedingung W) erfüllt, ist der zugehörige Koordinatenkörper pythagoreisch (d.h. für jede Summe σ von Quadraten in K: a) σ ist Quadrat und b) $\sigma \neq -1$), daher formal-reell[4]) und folglich (siehe [5], 3. Aufl., § 72) anordnungsfähig. Jede euklidische Ebene, die dem Axiom W) genügt, kann also auf mindestens eine Weise angeordnet werden.

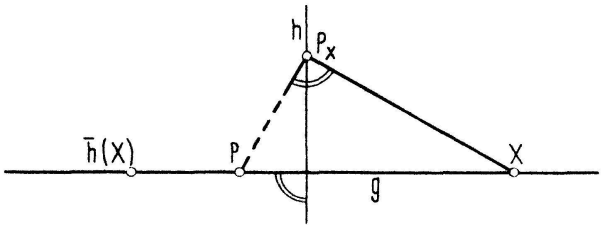
Dafür, dass eine euklidische Ebene höchstens eine Anordnung besitzt, lässt sich nun eine hinreichende Bedingung rein metrischer Art angeben. Für die Formulierung

---

[3]) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$ bezeichnen hier stets die Geradenspiegelungen an $a, b, c, \ldots$.

[4]) So heissen kommutative Körper, in denen -1 nicht als Quadratsumme darstellbar ist.

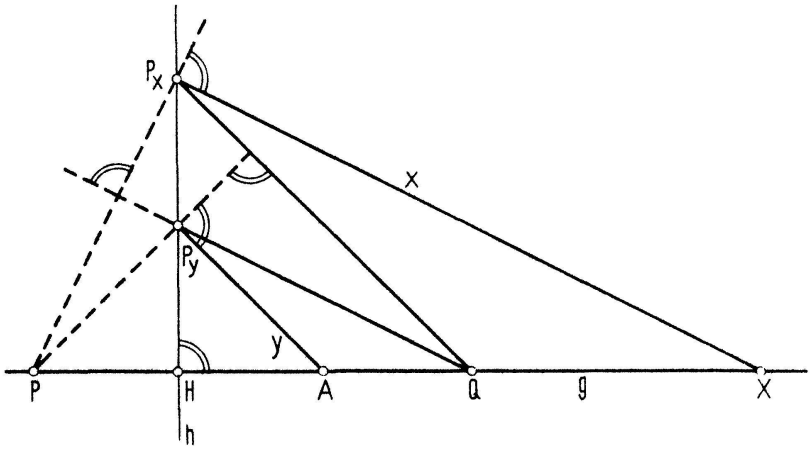
dieses Zusatzaxioms Z) ist es vorteilhaft, den zu einem Paar P, g eindeutig bestimmten Fusspunkt des Lotes von P auf g mit P_g zu bezeichnen.



Z) Sind P, X Punkte einer Geraden g und h ein Lot von g mit $P, X \notin h$, so geht durch genau einen der Punkte X, $\bar{h}(X)$ eine Gerade x mit $P_x \in h$.

9. Wenn eine euklidische Ebene E dem Axiom Z) genügt, gilt für jedes Element $\beta \neq 0$ des Koordinatenkörpers K von E: Entweder β oder $-\beta$ ist in K als Quadrat darstellbar.

Beweis: Es seien H, P verschiedene Punkte, $g := HP$ und h das Lot von g in H. Da für eine Gerade z durch P stets $P_z = P$ also $P_z \notin h$ gilt, gibt es durch den Spiegelpunkt $\bar{h}(P) =: A$ eine Gerade y mit $P_y \in h$. Sei nun $\alpha \in \mathsf{K}^*$, $\mathfrak{a} := \overrightarrow{HA}$ die Translation mit $\mathfrak{a}(H) = A$ und $X := (\alpha\,\mathfrak{a})\,(H)$. Wir zeigen: Dann und nur dann ist α Quadrat, wenn durch $(\alpha\,\mathfrak{a})\,(H)$ eine Gerade x geht mit $P_x \in h$. Dann: Die Parallele zu y durch P_x schneidet g in einem Punkt $(\lambda\,\mathfrak{a})\,(H) =: Q$. Nach dem Höhensatz[5]) ist QP_y eine Höhe im Dreieck PQP_x und folglich QP_y zu x parallel. Es sei λ' die Dilatation mit Zentrum



H, die A nach $(\lambda\,\mathfrak{a})\,(H) =: Q$ bringt. Identifiziert man die Punkte mit ihren Ortsvektoren bezüglich H, so ist λ' die Abbildung $\mathfrak{x} \to \lambda\,\mathfrak{x}$. Da y zu QP_x und QP_y zu x parallel ist, gilt $\lambda'(Q) = X$, also $\lambda' \circ \lambda'(A) = \lambda'(Q) = X$, das heisst $\lambda^2\,\mathfrak{a} = \alpha\,\mathfrak{a}$ und $\alpha = \lambda^2$.

Nur dann: Ist $\alpha = \lambda^2 \neq 0$, so definiert man $Q := (\lambda\,\mathfrak{a})\,(H)$. Die Dilatation λ' mit $\lambda'(H) = H$, $\lambda'(A) = Q$ führt dann QP_y in eine Gerade der gesuchten Art über.

Ist $\alpha \in \mathsf{K}$, so geht nach Z) entweder durch $(\alpha\,\mathfrak{a})\,(H)$ oder durch $(-\alpha\,\mathfrak{a})\,(H)$ eine Gerade x mit $P_x \in h$, und folglich ist genau eines der Elemente α, $-\alpha$ Quadrat.

[5]) Der Höhenschnittpunktsatz für Dreiecke gilt in jeder euklidischen Ebene.

10. Gilt in einer euklidischen Ebene E das Axiom Z), so hat E höchstens eine Anordnung. Gelten W) und Z) in E, so lässt sich E auf genau eine Weise anordnen.

Beweis: Ein Positivbereich eines Körpers enthält alle Körperelemente der Form α^2 ($\alpha \neq 0$) und kein Element der Gestalt $-\alpha^2$. Der Koordinatenkörper einer euklidischen Ebene, die Z) erfüllt, kann also wegen 9 keine von der Menge $\{\alpha^2 \mid \alpha \in \mathsf{K}^*\}$ verschiedene Teilmenge zum Positivbereich haben.

Der Koordinatenkörper einer stetig angeordneten euklidischen Ebene ist wegen 8 der reelle Zahlkörper. Die reelle euklidische Ebene lässt sich auch kennzeichnen als euklidische Ebene, die die Axiome W) und Z) erfüllt und deren (wegen 10 eindeutig bestimmtes) Halbgeradensystem dem Stetigkeitsaxiom S) genügt.

Alfred Uhl, Universität Karlsruhe

LITERATUR

[1] E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics *3* (1957).
[2] F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* (Springer 1959).
[3] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 8. Aufl. (Teubner 1956).
[4] H. Karzel, E. Ellers, *Grundzüge der Mathematik*, Band II, Teil A (Vandenhoeck und Ruprecht, 1967), Kap. 6.
[5] Van der Waerden, *Moderne Algebra*, 3. Aufl. (Springer, 1950).

On a Problem of W. Sierpiński

Let a, b be fixed coprime positive integers and let $p(a, b)$ denote the least prime in an arithmetic progression $\{a\,x + b\}$. Linnik [3] has proved that there exists an absolute constant L such that $p(a, b) < a^L$. Pan-Cheng-Tun [5] has calculated that $L \leqslant 10^4$.

Let C denote an absolute constant such that $p(a, b) \ll a^C$. Cheng-Jing-Run [1] has proved that $p(a, b) \ll a^{777}$. The best estimate for C to be found in literature is the result $C \leqslant 550$ of Jutila [2]. The Extended Riemann Hypothesis implies that $p(a, b) \ll a^{2+\varepsilon}$.

A positive integer n is called a pseudoprime if $n \mid 2^n - 2$ and n is composite. In [7] (see also [8]) I proved that if a, b are fixed coprime positive integers then there exist infinitely many pseudoprimes of the form $a\,x + b$ ($x = 0, 1, 2, 3, \ldots$).

In 1965 (during a seminar which the author attended) W. Sierpiński put forward the following problem: What estimate can we give for the least pseudoprime of the form $a\,x + b$ ($x = 0, 1, 2, 3, \ldots$)?

Here we shall prove the following.

Theorem. Let $P(a, b)$ denote the least pseudoprime $\equiv b \pmod{a}$ and let L and C be absolute constants such that $p(a, b) < a^L$, $p(a, b) \ll a^C$ respectively; then

1. $\log_2 P(a, b) < a^{6L^2+2L}$ for $a \geqslant 2$,

2. $\log P(a, b) \ll a^{4C^2+C+\varepsilon}$ for $\varepsilon > 0$.